2021 年度 経済数学入門 II (第 1 回) 講義ノート[*1]

この講義は, 表題の示す通り, **経済数学** (i.e., 経済学において用いられる数学について取り扱う教育科目), ひいては, **数理経済学** (i.e., 数学を積極的に用いて理論的に研究を行う経済学の一分野) への入門編として実施するものである.

0　数直線・xy-座標平面・xyz-座標空間

以後の議論においては, 定数, 変数, 関数の値などとして, 一般的に "実数" と呼ばれる数の概念を考える:

定義 0.1 (実数)**.** 次のような形で与えられる数 x を, 一般に**実数** (real number) という:

$$x = \pm\,(a_0\,\boldsymbol{.}\,a_1\,a_2\,a_3\cdots\cdots) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{但し, } a_0\,(\geq 0) \text{ は非負の整数とし, “}\boldsymbol{.}\text{”(\textbf{浮動小数点}) の右側に並ぶ} \\ a_n\ (n = 1,2,3,\cdots) \text{ は } 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \text{ のいづれかとする}\end{array}\right). \tag{0.1}$$

尚, このような数は **10 進数** (decimal number) とも呼ばれる. すなわち, 実数とは, 一般に<u>10 進数として表記されるような数</u> のことなのである. また, 実数全体の集合は (この講義も含め) $\mathbb{R}$ として書き表すことが一般的である.

補足. (0.1) の右辺の数は, より厳密にいえば, 任意の非負の整数 a_0 (≥ 0), および, 数列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ から

$$a_0\,\boldsymbol{.}\,a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n\cdots := a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \left(= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \right) \tag{0.1'}$$

という無限級数 (無限和)[*2]として定義される数に対して, 更に, ± 1 のいづれかを掛けたものである. ここで, 例えば, 符号が $+$ であるような非負の実数 x (≥ 0) を考えると,

$$x \overset{(0.1)}{=} a_0\,\boldsymbol{.}\,a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n\cdots \overset{(0.1')}{=} a_0 + (\,0\,\boldsymbol{.}\,a_1\,a_2\,a_3\,\cdots a_n\cdots)$$

と分解することができる. このことを踏まえて, a_0 を実数 x の**整数部分**, また, $0\,\boldsymbol{.}\,a_1\,a_2\,a_3\,\cdots a_n\cdots \left(= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}\right)$ を実数 x の**小数部分**という. (尚, 負の実数の整数部分・小数部分については省略する.)

尚, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は**数直線** (number line) と自然に同一視することができる. すなわち, 任意の実数 (10 進数) は, 実際に (0.1) のような形で与えられる数値に対応した位置にある直線上の '点' として理解することもできる:

$$\begin{array}{llll} 0 = 0.000\cdots, & 1 = 1.000\cdots, & 2 = 2.000\cdots, & \cdots \\ \frac{1}{2} = 0.500\cdots, & \frac{3}{2} = 1.500\cdots, & \frac{5}{2} = 2.500\cdots, & \cdots \\ \frac{1}{3} = 0.333\cdots, & \frac{2}{3} = 0.666\cdots, & \cdots & \\ \frac{1}{4} = 0.250\cdots, & \frac{1}{5} = 0.200\cdots, & \cdots & \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{2} = 1.41421356\cdots, \\ \sqrt{3} = 1.7320508\cdots, \\ e = 2.718281\cdots, \\ \pi = 3.141592\cdots, \quad \cdots. \end{array}$$

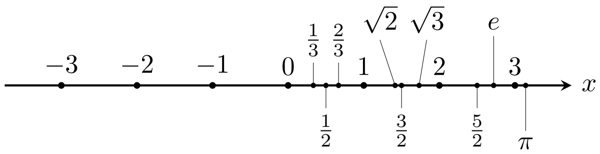


図 0.1　数直線

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] 無限級数の一般論については, この講義の後半で詳しく解説する.

また, 直線や曲線など, 様々な平面図形を数学的に取り扱う際は, 次のような概念を用いる:

定義 0.2 (xy-座標平面)**.** 二つの独立した方向に (無限に) 展開された平面の上で, 次の図 0.2 のように 2 本の数直線が互いに値 0 の点で直角に交わる (直交する) ように描かれたものを考える. ここで, 横向きの数直線のことを ***x*-軸**, 縦向きの数直線のことを ***y*-軸**と呼び, 更に, x-軸と y-軸の交点 O を**原点**と呼ぶことにする.

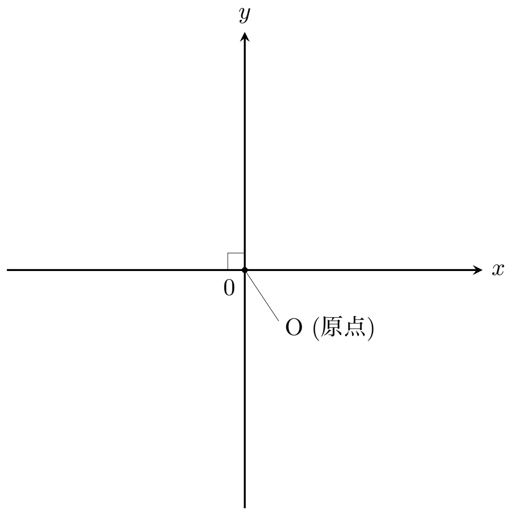


図 0.2　xy-座標平面

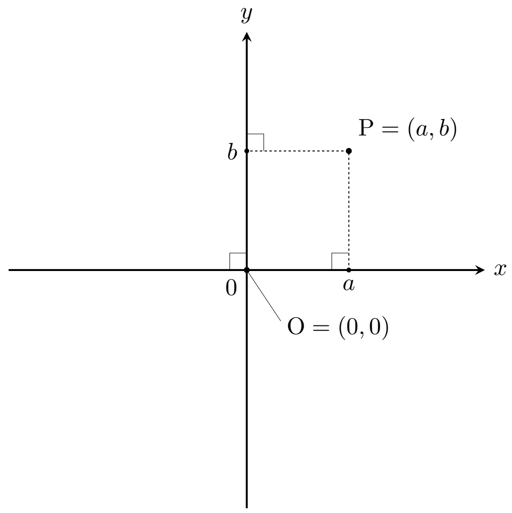


図 0.3　xy-座標平面における各点の座標

このような平面上にある任意の点 P の位置は, 点 P から x-軸へ下ろした垂線の足の数値 a と y-軸への垂線の足の数値 b の組 (a, b) によって一意的に表すことができる (cf. 図 0.3)[*3]. 以上のように, 各点の位置を識別する基準となるような 2 本の座標軸 (x-軸, y-軸) が導入された平面のことを ***xy*-座標平面** (xy-coordinate plane) という[*4].

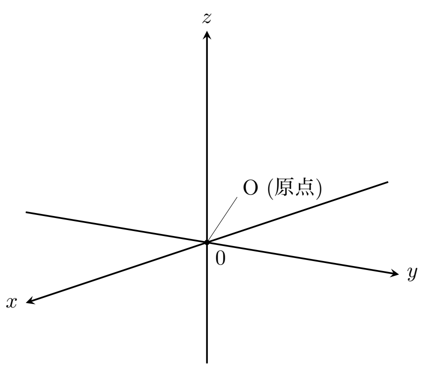
注意 0.3. xy-座標平面上の点 $\mathrm{P} = (a, b)$ と原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ の間の距離 (i.e., 線分 OP の長さ) は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である[*5].

補足. 上述の通り, xy-座標平面上の各点は二つの独立した実数の組と同一視されることから, xy-座標平面全体を集合として, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の直積集合

$$\mathbb{R}^2 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}$$

で書き表すこともある.

注意 0.4. 定義 0.2 と同様に, 三つの独立した方向に展開された (3 次元の) 空間に 3 本の座標軸 (x-軸, y-軸, z-軸) を導入することで, ***xyz*-座標空間**と呼ばれるものを考えることもできる. 尚, この空間も三つの独立した実数の組全体の集合と同一視することができるので, $\mathbb{R}^3 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{\, (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \,\}$ として書き表すこともある.



[*3] このとき, 点 P の ***xy*-座標**は (a, b) であるといい, これを省略して "$\mathrm{P} = (a, b)$" と書き表す. 特に, 原点 O の xy-座標は $(0, 0)$ である.
[*4] 厳密にいえば, これは ***xy*-直交座標平面**というべきものであるが, 省略して, 単に ***xy*-平面** (xy-plane) ということの方が多い.
[*5] 実際, 図 0.3 で線分 OP を斜辺とする直角三角形を考えれば, (Pythagoras の) 三平方の定理から, $|\mathrm{OP}|^2 = a^2 + b^2$ であるといえる.

1　ベクトルの概念

1.1　古典的な解釈

定義 1.1 (ベクトル)**.** 平面, あるいは, (3 次元の) 空間において, 下の図 1.1 のように

$$\text{ある点 P (\textbf{始点}) からある点 Q (\textbf{終点}) への “向き” を持った線分 (=長さが有限の直線)}\ {}^{*1} \tag{1.0}$$

を $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ と書き表わし, これを始点が P, 終点が Q の**ベクトル** (vector) という．但し,

$$\text{向きと長さを保ったまま平行移動することによって, 互いに重なり合うベクトルは全て同じものである} \tag{1.1}$$

と考える (cf. 図 1.2).

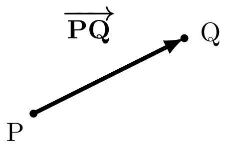


図 1.1　ベクトルのイメージ

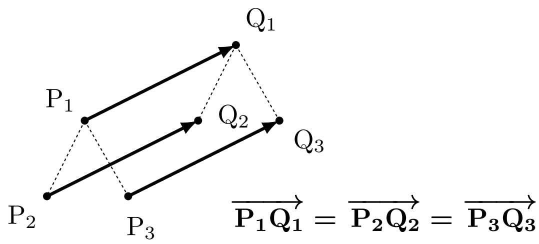


図 1.2　ベクトルの合同条件 (1.1)

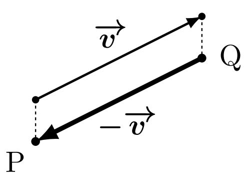
尚, 一つのベクトルを文字で表記する際は, 太字の英小文字 ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$, $\cdots$) を用いて表わし, 更に, その始点と終点 (の組) を具体的に例示して述べるときは $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のような形で書き表すことが一般的である.

補足. ベクトルという名称は, ラテン語の「運ぶ」という意味を持つ動詞 “vehere” の名詞形[*2]から派生したドイツ語 Vektor (ベクトル) に由来するものである．尚, 定義 1.1 で述べたようなベクトルの概念は, 例えば, 長さ, 温度, 時間のように (単位を指定すれば) 1 つの実数のみで表される定量 (**スカラー**) とは違い, 物体に作用する力や動体の速度, 加速度のように “大きさ”(あるいは, 長さ) と “向き” の両方を用いて表されるような概念を取り扱うために, 古典的な物理学 (古典力学) において導入されたものであるといわれている[*3].

定義 1.2 (零ベクトル, 逆ベクトル)**.** 始点と終点が同一の点であるような (すなわち, 長さが 0 の) ベクトルのことを, **零ベクトル** (zero vector) といい, これを一般に太字の数字 $\mathbf{0}$ を用いて書き表す:

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{\mathrm{PP}}. \tag{1.2}$$

また, 任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に対して, その長さは保ったまま (始点と終点の役割を入れ替えて) 向きを逆転させることで得られるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ のことを, $\boldsymbol{v}$ の**逆ベクトル** (inverse vector) といい, これを $(-\boldsymbol{v})$ と書き表す[*4]:



尚, 定義 (1.2) から明らかに $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であり, また, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $-(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ が成り立つといえる.

[*1] このようなものを, 数学では一般に**有向線分** (directed line segment) という．すなわち, ベクトルとは有向線分であるといってもよい.

[*2] つまり, 「運ぶもの」という意味のラテン語.

[*3] 正確に, いつから考えられ始めたのかは定かではないが, 例えば, 1687 年に出版された Isaac Newton の有名な著書『プリンキピア』(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica; 自然哲学の数学的諸原理) の中でも, 実際に物体の運動や天体の運行を記述するためにベクトルの概念が用いられている.

[*4] これは, 後述の定義 1.3 (2-ii) で与えられるベクトルの (-1) 倍と同じものである.

以上を踏まえて, ベクトルの間に, 次のような演算を導入することができる:

定義 1.3 (ベクトルの和・差・定数倍)**.** (1) **ベクトルの和・差：** 任意に与えられた 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ に対して, 下の図 1.3 のように "$\boldsymbol{v}$ の終点と $\boldsymbol{w}$ の始点が互いに重なり合う" ように平行移動して, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{QR}}$ と考えることができる (cf. (1.1)). このとき, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} := \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と定め, これをベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の**和** (summation) という.

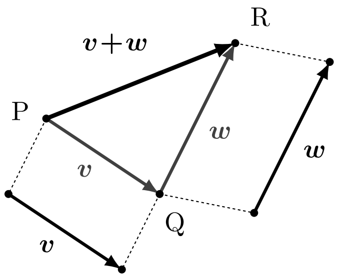


図 1.3　ベクトルの和

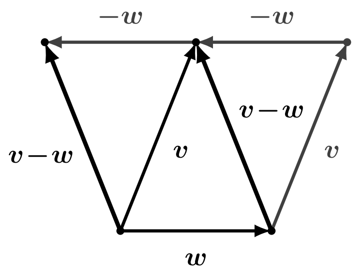


図 1.4　ベクトルの差

また, 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の**差** (difference) は, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} := \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$ として定義する (cf. 図 1.4[*5]).

(2) **ベクトルの (実) 定数倍：** 任意に与えられたベクトル $\boldsymbol{v}$ および (実) 定数 c に対して, 次のようにして定義されるベクトル $c\,\boldsymbol{v}$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}$ の**定数** (c) **倍** (scalar multiplication) という:

(2-i) $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $c \geq 0$ の場合, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とするとき, 線分 PQ, あるいは, その延長線上にある $|\mathrm{PQ}| : |\mathrm{PR}| = 1 : c$ となる点 R をとって, $c\,\boldsymbol{v} := \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ と定める (cf. 図 1.5).

(2-ii) $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $c < 0$ の場合, $c\,\boldsymbol{v} := (-c) \cdot (-\boldsymbol{v})$ と定める.

(2-iii) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の場合, 任意の定数 c に対して $c\,\boldsymbol{0} := \boldsymbol{0}$ と定める.

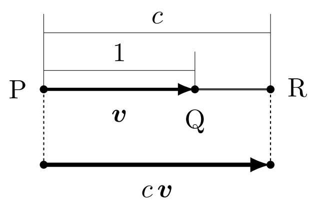


図 1.5　ベクトルの (非負) 定数倍

注意 1.4. (1) ベクトルの和 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ は, ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を "連結" (または, "合成") したものに他ならない. 特に,

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = 2\,\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = 3\,\boldsymbol{v}, \quad \cdots \quad \overbrace{\boldsymbol{v} + \cdots + \boldsymbol{v}}^{n} = n\,\boldsymbol{v}.$$

また, ベクトルの差についても, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ であるといえる (cf. 定義 1.2).

(2) ベクトルの定数倍 $c\,\boldsymbol{v}$ とは, $c \geq 0$ の場合, ベクトル $\boldsymbol{v}$ を (向きを保ったまま) 長さを c 倍したものである[*6]. 一方, $c < 0$ の場合は, $\boldsymbol{v}$ の逆ベクトル $(-\boldsymbol{v})$ (cf. 定義 1.2) を $|c| = -c\ (> 0)$ 倍したものが, ベクトル $c\,\boldsymbol{v}$ である:

$$1 \cdot \boldsymbol{v} \overset{\text{(2-i)}}{=} \boldsymbol{v}, \quad 0 \cdot \boldsymbol{v} \overset{\text{(2-i)}}{=} \boldsymbol{0}, \quad (-1) \cdot \boldsymbol{v} \overset{\text{(2-ii)}}{=} 1\,(-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}, \quad (-2) \cdot \boldsymbol{v} \overset{\text{(2-ii)}}{=} 2\,(-\boldsymbol{v}), \quad \cdots\cdots.$$

命題 1.5 (**ベクトルの和・差・定数倍の基本法則**)**.** 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ および (実) 定数 c, c_1, c_2 に対して, 次の (i), $\cdots$, (viii) が成り立つ*:*

(i) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$.

(ii) $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$.

(iii) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$.

(iv) $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ (すなわち, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$).

(v) $c_2\,(c_1\,\boldsymbol{v}) = c_1\,(c_2\,\boldsymbol{v}) = (c_1\,c_2)\,\boldsymbol{v}$.

(vi) $c\,(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = c\,\boldsymbol{v}_1 + c\,\boldsymbol{v}_2$.

(vii) $(c_1 + c_2)\,\boldsymbol{v} = c_1\,\boldsymbol{v} + c_2\,\boldsymbol{v}$.

(viii) $0\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ 1\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},\ (-1)\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

証明. 定義 1.3 を踏まえて, 簡単な図を描くことで, 全て説明することができる (cf. 後述の練習問題 1.1). □

注意 1.6. 命題 1.5 の主張から, ベクトルの和・差・定数倍の演算は, 実数の和・差・積と同様に, 自然な演算法則 (e.g., 交換法則, 結合法則, 分配法則) に則って計算してよいといえる[*7].

[*5] ベクトル $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ が 2 通りに与えられているが, どちらも互いに平行であるので, 合同条件 (1.1) により, 同じベクトルであるといえる.

[*6] 特に, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (零ベクトル) の場合は, 明らかに $c\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるといえる (cf. (2-iii)).

[*7] ここで, 特に, 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ (cf. 定義 1.2) が, 実数における数 0 ($\in \mathbb{R}$) と同様の役割を担っていることに注意する.

1.2 近代的な解釈 (線形代数学入門)

以下では, 簡単のため, “平面” の上に定義されたベクトル (cf. 定義 1.1) を主として考えることにする.

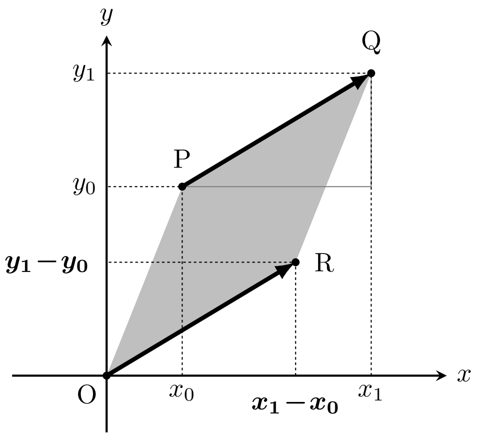
定義 1.7 (平面ベクトルの数ベクトル表示)**.** xy-座標平面 (cf. 定義 0.2) の上で任意に与えられたベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に対して, その始点 P と終点 Q の xy-座標を, それぞれ, 以下のようなものとする:

$$\mathrm{P} = (x_0, y_0), \qquad \mathrm{Q} = (x_1, y_1).$$

ここで, 線分 PQ を “始点 P が原点 O $= (0, 0)$ に重なる” ように平行移動することで得られる線分を OR とすると, 点 R の xy-座標は, 明らかに

$$\mathrm{R} = (x_1 - x_0,\, y_1 - y_0) \tag{1.3}$$

であり, また, 定義 1.1 において述べたベクトルの合同条件 (1.1) から, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ であるといえる.



尚, このような “原点 O を始点とするベクトル” は, その終点の xy-座標と同一視して考えてよい[*8]. 以上を踏まえて, 始点が P $= (x_0, y_0)$, 終点が Q $= (x_1, y_1)$ であるようなベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を, (1.3) で得られた 2 つの実数を用いて,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と書き表し, これをベクトル $\boldsymbol{v}$ の **(実) 数ベクトル表示**という. 特に, 零ベクトル $\mathbf{0}$ (cf. (1.2)) の数ベクトル表示は,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

補足 (各点の位置ベクトル)**.** xy-座標平面における任意の点 P $= (x, y)$ に対して, (1.4) より, ベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.4'}$$

と数ベクトル表示される. これは点 P の “位置” を表す xy-座標 (x, y) を転置して縦に並べ換えただけのものである (cf. 定義 0.2)[*9]. このような理由から, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のことを, 点 P の**位置ベクトル** (position vector) ともいう.

例 1.8. xy-座標平面における点 O $= (0, 0)$, P $= (2, -1)$, Q $= (5, 3)$ に対して, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ を (1.4) (あるいは, (1.4')) のように数ベクトル表示すると, それぞれ, 次のような形となる:

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

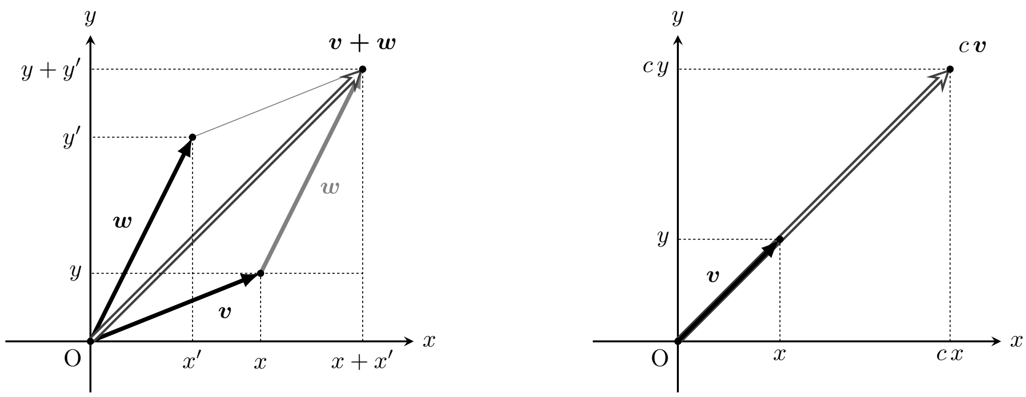
[*8] 実際, $\overrightarrow{\mathrm{OR_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OR_2}} \Longleftrightarrow \mathrm{R_1} = \mathrm{R_2}$.

[*9] ここでは, ベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と点 P の xy-座標とを混同しないように, 敢えて (1.4') のように縦向きで数ベクトル表示しているが, 別に, $\boldsymbol{v} = (x, y)$ と横向きに数ベクトル表示しても構わない.

補題 1.9 (**平面ベクトルの和・差・定数倍の数ベクトル表示**)**.** xy-座標平面上のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ (cf. 定義 1.7) および (実) 定数 c に対して, ベクトル $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $c\,\boldsymbol{v}$ (cf. 定義 1.3) は, それぞれ, 次のように数ベクトル表示される:

$$(1)\quad \boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} \left(= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \end{pmatrix}. \qquad (2)\quad c\,\boldsymbol{v} \left(= c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c\,x \\ c\,y \end{pmatrix}.$$

証明. $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とすると, 点 P, Q の座標は, それぞれ, $\mathrm{P} = (x, y)$, $\mathrm{Q} = (x', y')$ であるといえる. 従って, 定義 1.3 & 1.7 から, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$, $c\,\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c\,x \\ c\,y \end{pmatrix}$ となることが, 以下の図のように簡単にわかる:



更に, これらのことから, $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}+(-1)\cdot\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x' \\ -y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$ が得られる. □

注意 1.10. xy-座標平面上の 2 点 $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$, $\mathrm{Q} = (x_1, y_1)$ に対して, 定義 1.7 (1.4) で与えたベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の数ベクトル表示は, 補題 1.9 (1) により, 次のようにも書き換えられる:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ であることに注意すると, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であることがわかる.

補題 1.11 (平面ベクトルの長さ)**.** 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, その (線分としての) 長さを一般に $\|\boldsymbol{v}\|$ と書き表す. すなわち, xy-座標平面上のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して, その長さは $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ である.

証明. 定義 1.7 と (Pythagoras の) 三平方の定理から, これは明らかである (cf. 注意 0.3). □

以上の議論は, (3 次元の) 空間で定義されたベクトルに対しても同様に展開することができる. すなわち, xyz-座標空間における任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を, 始点が原点 $\mathrm{O} = (0,0,0)$ と重なるように平行移動して, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と考えたとき, その終点が $\mathrm{P} = (x, y, z)$ であるならば, このようなベクトル $\boldsymbol{v}$ を 3 つの実数 x, y, z の組と同一視して

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

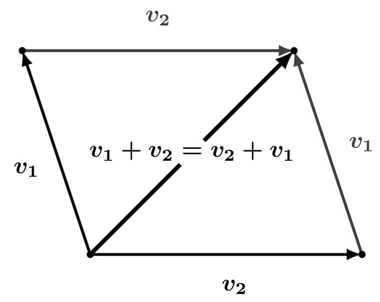
と理解する. こうすることによって, ベクトルの和・差・定数倍や長さが, 以下のような形で簡単に計算できる:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \pm x' \\ y \pm y' \\ z \pm z' \end{pmatrix}, \quad c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x \\ c\,y \\ c\,z \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.7}$$

このように平面や空間におけるベクトルに関する議論は, 有限個の実数の組に関する議論に置き換えて考えることで, 合理的に理解することができるのである.

練習問題 1.1. 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に対して $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$ (cf. 命題 1.5 (i)) が成り立つことを確かめよ.

解答. 以下のような図を描くことで, 簡単に確かめられる:



(尚, 命題 1.5 の主張 (ii), $\cdots$, (viii) が成り立つことも, 同様に簡単な図を描くことで確かめることができる.) $\square$

練習問題 1.2. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して, $2\,\boldsymbol{a} + 3\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

解答. 命題 1.5 & 補題 1.9 (2) より, $2\,\boldsymbol{a}+3\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow 3\,\boldsymbol{b} = -2\,\boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = -\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a} = -\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\square$

練習問題 1.3. xyz-座標空間における 3 点 $\mathrm{A} = (1, 2, -1)$, $\mathrm{B} = (2, 1, 3)$, $\mathrm{C} = (4, -2, 1)$ に対して, 以下のベクトルを (1.6) のような形で 3 つの実数の組として (数ベクトル表示して) 表せ.

$$(1)\ \ \overrightarrow{\mathrm{AB}} \qquad (2)\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (3)\ \ \overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad (4)\ \ \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \qquad (5)\ \ \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

解答. (1), (2), (3) は, (1.4) と同様にして, 簡単に求められる. また, (4), (5) は (1.7) のように計算すればよい.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. (2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(4) 前問 (1), (3) の結果から, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+(-3) \\ 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(5) 前問 (1), (2) の結果から, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -4-(-1) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\square$

注意. 上の (4), (5) で得られた結果からもわかるように, 任意の 3 点 A, B, C に対して, 次のような等式が成り立つ:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

(実際, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (cf. 注意 1.10) から, これらは直ちに従う.)

2021 年度 経済数学入門 II (第 2 回) 講義ノート[*1]

2　ベクトルの長さ・内積

定義 2.1 (ベクトルの長さ)**.** (i) xy-座標平面, あるいは, (ii) xyz-座標空間において, 任意に与えられたベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, その<u>線分としての長さ</u>を $\|\boldsymbol{v}\|$ によって書き表し, これをベクトル $\boldsymbol{v}$ の**長さ** (length) という[*2]. すなわち,

$$\text{(i)}\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad \text{(ii)}\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2.1}$$

注意. (1) 上述の (2.1) は, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ として, 線分 OP の長さを (Pythagoras の) 三平方の定理によって求めただけのものである (cf. 補題 1.11). また, 一般に $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に対しても, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (cf. 注意 1.10) であるので,

(i)　$\mathrm{P} = (x_0, y_0)$, $\mathrm{Q} = (x_1, y_1)$ のとき,

$$\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}.$$

(ii)　$\mathrm{P} = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{Q} = (x_1, y_1, z_1)$ のとき,

$$\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}.$$

尚, 定義 2.1 からも明らかであるが, 一般に $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ であり, 特に, $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (零ベクトル) であるといえる.

(2) **ベクトルの三角不等式：** スカラー (実数) の絶対値と同様に, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に対して, 定義 2.1 から, 次のような不等式が成り立つといえる:

$$\|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\| \leq \|\boldsymbol{v}_1\| + \|\boldsymbol{v}_2\|. \tag{2.2}$$

(実際, $\boldsymbol{v}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$, $\boldsymbol{v}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ として線分 OP_1, OP_2 を隣り合う 2 辺に持つような平行四辺形を描いてみるとよい.)

定義 2.2 (ベクトルの内積)**.** ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角度が弧度法を用いて θ (rad) と表されたとする[*3]. このとき, 次のような形で与えられる実数 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ ($\in \mathbb{R}$) を, ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ の**内積** (inner product) という:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} := \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,\cos\theta. \tag{2.3}$$

尚, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ あるいは $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ である場合には, 便宜的に $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} := 0$ と定める.

補足. (2.3) のような内積の概念は, 19 世紀の中頃に Hermann G. Grassmann (1809–1877 年) によって導入されたものであるが, 彼が, これを “内積” と呼んだ理由については, 右の図 2.1 をみれば, 概ね, 次のようなことに起因するものだと推察される:

> ベクトル $\boldsymbol{w}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の “内” 側に射影して,
> 両者の長さの “積” を取ったものが $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ である.

因みに, 図 2.1 から, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を隣り合う 2 辺に持つ平行四辺形の面積 S は, 次のような形で表されるといえる:

$$S = \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,\sin\theta.$$

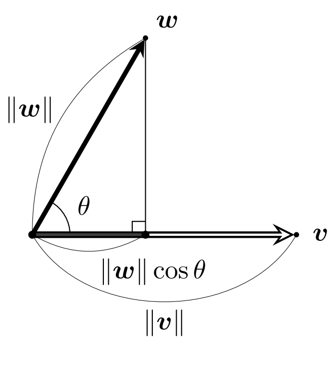


図 2.1　内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ のイメージ

注意 2.3. 定義 2.1 & 2.2 から, 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$ (すなわち, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$) が成り立つことがわかる[*4]. このことから, ベクトルの内積は “長さ” の概念を拡張したものであるといえる. また, (2.3) から,

$$|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\| \quad \left(\text{あるいは}, \ (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2 \leq \|\boldsymbol{v}\|^2\,\|\boldsymbol{w}\|^2\right) \tag{2.4}$$

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] あるいは, $\|\boldsymbol{v}\|$ のことをベクトル $\boldsymbol{v}$ の**大きさ** (magnitude) といって, これを実数の絶対値と同じ記法を用いて $|\boldsymbol{v}|$ と書き表すこともある.

[*3] 弧度法については [経済数学入門 I (第 3 回) 講義ノート] を参照せよ. 尚, 二つのベクトルのなす角 θ は, 通常 “$0 \leq \theta \leq \pi$” として考える.

[*4] 実際, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ ならば, (2.3) より, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2 \cos 0 = \|\boldsymbol{v}\|^2$ となる.

が一般的に成立することも明らかである．この不等式 (2.4) は **(Cauchy-) Schwarz の不等式**[*5]と呼ばれる．

補題 2.4 (**ベクトルの直交条件**)**.** *2* つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ に対して，

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \text{ と } \boldsymbol{w} \text{ は直交する．}$$

証明. ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, 定義 2.1 より, $\|\boldsymbol{v}\|$, $\|\boldsymbol{w}\| > 0$ である．従って, $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のなす角度を θ (但し, $0 \leq \theta \leq \pi$) とすると, 定義 2.2 (および, 余弦関数 $\cos\theta$ の定義) から,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \overset{(2.3)}{\Longleftrightarrow} \cos\theta = 0 \ (\text{但し}, 0 \leq \theta \leq \pi) \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \text{ と } \boldsymbol{w} \text{ は直交する}$$

といえる． □

実際に様々なベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ に対して内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ の数値を具体的に求める際は, 次のことに注目して計算するとよい．

定理 2.5. (i) xy-座標平面, あるいは, (ii) xyz-座標空間において, ベクトルの内積は以下のような形で求められる*:*

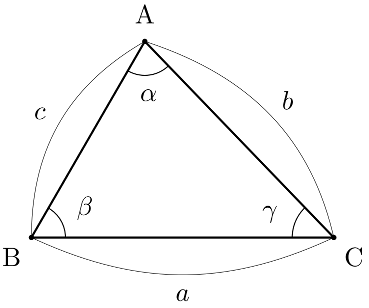
(i) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x\,x' + y\,y'.$$

(ii) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ に対して,

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = x\,x' + y\,y' + z\,z'.$$

証明. $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ のどちらか一方が $\boldsymbol{0}$ (零ベクトル) である場合, あるいは, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{w} = c\,\boldsymbol{v}$ ($\neq \boldsymbol{0}$) となるような定数 $c \neq 0$ が存在する場合 (cf. 後述の (2.5)) については, 定義 2.2 から容易に示される．その他一般の場合については, (任意の) 三角形の内角と 3 辺の長さに関する**余弦定理** (law of cosines), すなわち, 次の主張 ($\star$) を用いるとよい:



$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\,\cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma. \end{cases}$$

(i) $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ (すなわち, $\mathrm{P} = (x, y)$, $\mathrm{Q} = (x', y')$) として, 三角形 $\triangle\mathrm{OPQ}$ に余弦定理を適用すれば,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &\overset{(2.3)}{=} \|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,\cos\theta = \|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\|\cos\theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2\,\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\|\cos\theta \overset{(\star)}{=} \frac{1}{2}\left\{\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\|^2 - \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|^2\right\}. \end{aligned}$$

ここで, (2.1) より, $\|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 = \underline{x^2 + y^2}$, $\|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\|^2 = \|\boldsymbol{w}\|^2 = \underline{(x')^2 + (y')^2}$. 更に, 定義 2.1 の注意 (1) より,

$$\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}\|^2 = \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = \underline{(x')^2} - 2\,x\,x' + \underline{x^2} + \underline{(y')^2} - 2\,y\,y' + \underline{y^2}$$

である．以上のことから, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \dfrac{1}{2} \times 2\,(x\,x' + y\,y') = x\,x' + y\,y'$ であるといえる．同様にして (ii) も示される． □

命題 2.6 (**ベクトルの内積の基本法則**)**.** 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{w}$ および (実) 定数 c に対して, 以下のような等式が一般に成立する*:*

(0) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$ (cf. 注意 2.3).

(1) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ (**※内積の交換法則**).

(2) $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{w}$ (**※内積の分配法則**).

(3) $(c\,\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot (c\,\boldsymbol{w}) = c\,(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$.

[*5] 正確には, 後述の定理 2.5 と併せることで得られる $(x_1\,x_2 + y_1\,y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)^2 \times (x_2^2 + y_2^2)^2$, $\cdots$ のことを, このように呼称する．

証明. 定理 2.5 から直ちに従う．(詳細については, 各自で確かめよ．) $\square$

例 2.7. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の長さは, 定義 2.1 (あるいは, 命題 2.6 (0)) から,

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \quad \|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad \|\boldsymbol{c}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

である．次に, 定理 2.5 (ii) を踏まえて, 内積 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})$ の数値を求めてみると,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-1) = 1 - 2 + 1 = 0,$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-2) \times 0 + (-1) \times 1 = 1 + 0 - 1 = 0,$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

従って, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ であるので, 補題 2.4 から, ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, どの 2 つを選んでも互いに直交しているといえる．(ここで, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と考えれば, xyz-座標空間における点 O, A, B, C の相対的な位置関係が "実際に作図することなく" 理解できたことに注意せよ．)

補足 (ベクトルの平行条件)**.** 因みに, 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ に対して,

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ は互いに平行である}^{*6} \iff \boldsymbol{w} = c\,\boldsymbol{v} \text{ となるような定数 } c \neq 0 \text{ が存在する．} \tag{2.5}$$

(実際, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ として考えれば, これは 3 点 O, P, Q が全て同じ直線上にあるということに他ならない．) 尚, 互いに平行なベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ に対して, それらのなす角 θ (但し, $0 \leq \theta \leq \pi$) は明らかに $\theta = 0$ か $\theta = \pi$ のどちらかであるといえるが, これら 2 つの場合は, 上述の条件 (2.5) における (実) 定数 c $(\neq 0)$ が正・負となる場合に, それぞれ対応するものである:

$$\theta = 0 \iff c > 0, \qquad \theta = \pi \iff c < 0. \tag{2.5'}$$

□ **内積の応用例** (xy-座標平面上の直線の方程式, xyz-座標空間内の平面の方程式の一般形)**.**

命題 2.8. (1) xy-座標平面上において, ある点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ を通る直線の方程式は, 一般に

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0 \qquad (\text{但し, } (a, b) \neq (0, 0) \text{ とする}) \tag{2.6}$$

のような形で与えられる．

(2) xyz-座標空間内において, ある点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通る平面の方程式は, 一般に

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \qquad (\text{但し, } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) \text{ とする}) \tag{2.7}$$

のような形で与えられる．

証明. (1) xy-座標平面上で点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ を通る直線の上にある任意の点 $\mathrm{P} = (x, y)$ に対して, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ は, ある共通のベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するといえる．従って, 補題 2.4 より,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \iff a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0 \quad (\text{cf. 定理 2.5 (i)}).$$

---

*6 ここでは, 有向線分であるベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ を (向きを無視して) 単なる線分と考えて, 互いに平行な直線の上にあるか否かを述べている．

(2) 上の (1) と同様に, xyz-座標空間内で点 $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通る平面の上にある任意の点 $\mathrm{P} = (x, y, z)$ に対して, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$ は, ある共通のベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するといえるので, 補題 2.4 より,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \iff a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \quad (\text{cf. 定理 2.5 (ii)}).$$

以上により, 題意は示された. □

注意 2.9. (1) xy-座標平面上の直線の方程式 (2.6) について,

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0 \iff a\,x + b\,y - (a\,x_0 + b\,y_0) = 0.$$

すなわち, $c = -(a\,x_0 + b\,y_0)$ とおくと, これは "$a\,x + b\,y + c = 0$" と書き換えられる.

(2) xyz-座標空間内の平面の方程式 (2.7) についても同様に,

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \iff a\,x + b\,y + c\,z - (a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0) = 0$$

であるので, $d = -(a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0)$ とおくと, これもまた "$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$" と書き換えることができる.

定義 2.10 (直線・平面の法ベクトル)**.** S を xy-座標平面上の直線, または, xyz-座標空間内の平面のいづれかとして, S と直交するベクトル $\boldsymbol{n}$ ($\neq \mathbf{0}$) のことを, S の**法ベクトル** (normal vector) という. すなわち, 命題 2.8 の証明から,

(1) $S = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\,x + b\,y + c = 0 \,\}$ (直線) に対して,

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は S の法ベクトルである.

(2) $S = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \,\}$ (平面) に対して,

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は S の法ベクトルである.

注意 2.11. 直感的にも明らかであるが, 命題 2.8 & 定義 2.10 から, xy-座標平面上の直線や xyz-座標空間内の平面は, その上を通る点 P_0 の座標と法ベクトル $\boldsymbol{n}$ の数ベクトル表示が 1 組与えられれば, (2.6) や (2.7) のような形の方程式によって具体的に一つ与えられるといえる. 逆に, (2.6) あるいは, (2.7) のような形で与えられた一つの方程式に対して, その両辺を (0 でない) 定数倍したものを考えても全く同じ条件が得られるので, 定義 2.10 で述べた直線・平面の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して, その定数倍 $c\boldsymbol{n}$ (但し, $c \neq 0$) もまた同じ直線・平面の法ベクトルである*6. 従って, 任意に与えられた一つの直線・平面に対して, その法ベクトルを考える際は, **定数倍による差異は無視しても構わない**.

練習問題 2.1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ のなす角度 θ (但し, $0 \leq \theta \leq \pi$ とする) を求めよ.

解答. $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ (cf. 定義 2.1 (i)). 一方, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = 3 + 2 = 5$ (cf. 定理 2.5 (i)). 従って, 定義 2.2 から, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta = \sqrt{5} \times \sqrt{10} \cos\theta = 5$. すなわち, $5\sqrt{2}\cos\theta = 5 \iff \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(0 \leq \theta \leq \pi) \iff \theta = \dfrac{\pi}{4}$ (rad) $\big(\iff \theta = 45^\circ\big)$ である. □

練習問題 2.2. xy-座標平面上で点 $\mathrm{P}_0 = (1, 1)$ を通り, $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を法ベクトルとする直線の方程式を求めよ.

解答. 命題 2.8 (1) & 定義 2.10 (1) より, $2\,(x - 1) + 3\,(y - 1) = 0 \iff 2\,x + 3\,y - 5 = 0$ $(\iff 2\,x + 3\,y = 5)$. □

*6 例えば, 定義 2.10 で与えた直線・平面の法ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して, $-\boldsymbol{n} = (-1)\,\boldsymbol{n}$ もまた同じ直線・平面の法ベクトルである.

2021 年度 経済数学入門 II (第 3 回) 講義ノート[*1]

3　1 変数関数の微分法 (※経済数学入門 I の復習)

定義 3.1 (1 変数関数の微分)**.** ある開区間 $X\ (\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ の上で定義された関数 $f(x)\ (x \in X)$ に対して, 次のような (平均変化率の) 極限を値とする関数を, $f(x)$ の**微分** (differential), あるいは, **導関数** (derivative) という:

$$\boldsymbol{f'(x)} \left(= \{\, \boldsymbol{f(x)} \,\}' \right) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (x \in X). \tag{3.1}$$

補足. 与えられた関数 $f(x)$ に対して, その微分は上述の (3.1) のように "$f'(x)$" と表記することが一般的である[*2]. しかし, 場合によっては, 以下のように別の表記法を用いて微分を表すこともある: $y = f(x)\ (x \in X)$ とおくとき,

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \left(= \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}} \{\, \boldsymbol{f(x)} \,\} \right) := f'(x) \ \cdots \boxed{\textbf{Leibniz の表記法}}, \qquad \dot{\boldsymbol{y}} \left(= \dot{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{(x)} \right) := f'(x) \ \cdots \boxed{\textbf{Newton の表記法}}.$$

例 3.2. 定数関数 $f(x) = C\ (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ の場合, 任意の実数 $x\ (\in \mathbb{R})$ に対して,

$$f'(x) \overset{(3.1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

すなわち, $f'(x) = 0\ (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ である.

補題 3.3 (**基本的な関数の微分公式**)**.**

(1) $n = 0, 1, 2, \cdots$ (非負の整数) $\Longrightarrow (\, x^n \,)' = n\, x^{n-1} \quad (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$.

(2) $(\, e^x \,)' = e^x \quad (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$.

(3) $(\, \log x \,)' = \dfrac{1}{x} \quad (\, x \in (0, \infty)\,)$.

(4) $(\, \sin x \,)' = \cos x, \ \ (\, \cos x \,)' = -\sin x \quad (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$.

証明. 定義 3.1 の通りに, (3.1) のような極限を実際に計算することで示される. (詳細については, 経済数学入門 I の講義ノート等を参照せよ.) □

定理 3.4 (**一般的な微分の計算原理**)**.**

(1) **四則演算 (和・差・積・商) の微分法則** : 関数 $f(x),\ g(x)\ (x \in X)$ に対して,

  (i) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \quad (x \in X)$.

  (ii) $\boldsymbol{\{\, f(x)\, g(x) \,\}' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)} \quad \left(\text{特に, } \{\, c\, f(x) \,\}' = c\, f'(x) \right) \quad (x \in X)$.

  (iii) $\left\{ \dfrac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \left(\text{特に, } \left\{ \dfrac{1}{g(x)} \right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \right) \quad (\, x \in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\}\,)$.

(2) **合成関数の微分法則** : 関数 $f(x)\ (x \in X),\ g(y)\ (y \in Y)$ (但し, Y は $f(x)$ の値域 $f(X) := \{\, y = f(x) \mid x \in X \,\}$ を含むものとする) に対して,

$$\{\, \boldsymbol{g}(f(x)) \,\}' = \boldsymbol{g'}(f(x)) \times \underset{\sim\sim\sim}{f'(x)} \quad (x \in X). \tag{3.2}$$

(3) **逆関数の微分法則 (※ Leibniz 式の表記)** : $y = f(x)\ (x \in X) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)\ (\, y \in f(X)\,)$ とすると,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} \qquad \left(\text{但し, } \frac{dy}{dx} \neq 0 \text{ とする} \right).$$

証明. これらもまた, 定義 3.1 に基づいて, 実際に極限を計算することで示される. □

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] 尚, このような微分の表記法は Joseph-Louis Lagrange (1736–1813 年) によって導入されたものである.

注意 3.5. (1) **商の微分法則を用いて導き出される公式：** 補題 3.3 (1) & 定理 3.4 (1-iii) から, $m=1,2,\cdots$ に対して,

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{\left(x^m\right)'}{\left(x^m\right)^2}=-\frac{m\,x^{m-1}}{x^{2m}}=-\frac{m}{x^{m+1}}\iff\left(x^{-m}\right)'=-m\,x^{-m-1}\quad(\text{但し},\ x\neq 0\ \text{とする}).$$

従って, 任意の整数 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ に対して, (n の正負に関係なく) 一般に $(x^n)'=n\,x^{n-1}$ が成り立つといえる. 同様に, 正接関数 $\tan x:=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(x\in\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x\neq 0\})$ に対しても, 補題 3.3 (4) & 定理 3.4 (1-iii) から,

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

(2) **合成関数の微分法則を用いて導き出される公式：** 補題 3.3 (2) & 定理 3.4 (2) から, 一般に次のような微分公式が成り立つといえる[*3]:

$$\left\{e^{f(x)}\right\}'=e^{f(x)}\times f'(x).$$

従って, 任意の実数 $a\,(\in\mathbb{R})$ に対して, 一般に $x^a:=e^{a\log x}$ $(x\in(0,\infty))$ と定義されることから, 補題 3.3 (3) より,

$$(x^a)'=\left(e^{a\log x}\right)'=e^{a\log x}\times(a\log x)'=x^a\times\frac{a}{x}=a\,x^{a-1}.$$

すなわち, (上述の (1) のように a が整数である場合に限らずとも) 一般に $(x^a)'=a\,x^{a-1}$ $(x\in(0,\infty))$ が成り立つ. 例えば,

$$\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}\,x^{-1/2}\ \left(\text{すなわち},\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),\quad \left(x^{-1/2}\right)'=-\frac{1}{2}\,x^{-3/2}\ \left(\text{すなわち},\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{2\,x\sqrt{x}}\right).$$

同様に, 補題 3.3 (3) & 定理 3.4 (2) から, $f(x)>0$ である場合, 一般に次のような微分公式が成り立つこともわかる:

$$\{\log f(x)\}'=\frac{1}{f(x)}\times f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

従って, 例えば, 任意の $x<0$ に対して,

$$\{\log(-x)\}'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}.$$

すなわち, $(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ であるといえる. 更に, このことから, 定理 3.4 (2) により,

$$\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}\ (\text{但し},\ f(x)\neq 0\ \text{とする})\quad\cdots\ \boxed{\text{対数微分法の基本原理}}$$

が成り立つこともわかる[*4]. 以上の議論からもわかる通り, 合成関数の微分法則により, 補題 3.3 で述べた微分公式の "一般形" というべき, 以下のような微分公式が導き出される:

$$\begin{aligned}
&[1]\quad \{f(x)^a\}'=a\,f(x)^{a-1}\times f'(x)\ (\text{但し},\ a\in\mathbb{R}\ \text{は “任意の” 定数とする}).\\
&[2]\quad \left\{e^{f(x)}\right\}'=e^{f(x)}\times f'(x).\\
&[3]\quad \{\log|f(x)|\}'=\frac{1}{f(x)}\times f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\ (\text{但し},\ f(x)\neq 0\ \text{とする}).\\
&[4]\quad \{\sin f(x)\}'=\cos f(x)\times f'(x),\ \{\cos f(x)\}'=-\sin f(x)\times f'(x),\ \{\tan f(x)\}'=\frac{1}{\cos^2 f(x)}\times f'(x).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

これら 4 種の公式を踏まえて, 四則演算 (特に, 和・積) の微分法則を適用すれば, 実際に様々な関数の微分 (導関数) を具体的に求めることができる.

(3) 逆関数の微分法則を用いて, 例えば, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ $(x\in(0,\infty))$ となることを微分公式 $(x^2)'=2\,x$, $(e^x)'=e^x$ $(x\in\mathbb{R}=(0,\infty))$ から簡単に導き出すこともできるのだが, ここでは省略する.

[*3] 実際, 等式 (3.2) を $g(y)=e^y$ として考えてみればよい.

[*4] 実際, これも等式 (3.2) を $g(y)=\log|y|$ として考えてみればよい.

練習問題 3.1. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\quad (x-1)\,(2\,x+3) \qquad (2)\quad x\,e^x \qquad (3)\quad \frac{\log x}{x}\quad (\,x\in(0,\infty)\,) \qquad (4)\quad \sin x\,\cos x$$

解答. 補題 3.3 で述べた微分公式を踏まえて, 四則演算 (和・差・積・商) の微分法則を用いればよい:

(1) 積の微分法則 (cf. 定理 3.4 (1-ii)) から,

$$\begin{aligned}\{\,(x-1)\,(2\,x+3)\,\}' &= \{\,(x-1)\,\}'\times(2\,x+3)+(x-1)\times\{\,(2\,x+3)\,\}'\\ &= 1\times(2\,x+3)+(x-1)\times 2 = 2\,x+3+2\,x-2 = 4\,x+1.\end{aligned}$$

(2) 積の微分法則 (cf. 定理 3.4 (1-ii)) から,

$$\{\,x\,e^x\,\}' = (\,x\,)'\times e^x + x\times(\,e^x\,)' = 1\times e^x + x\times e^x = e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x.$$

(3) 商の微分法則 (cf. 定理 3.4 (1-iii)) から,

$$\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{(\,\log x\,)'\times x - \log x\times(\,x\,)'}{x^2} = \frac{\dfrac{1}{x}\times x - \log x\times 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}.$$

(4) 積の微分法則 (cf. 定理 3.4 (1-ii)) から,

$$(\,\sin x\,\cos x\,)' = (\,\sin x\,)'\times\cos x + \sin x\times(\,\cos x\,)' = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

□

練習問題 3.2. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\quad \sqrt{x^2+1} \qquad (2)\quad 2^x \qquad (3)\quad \log\,(x^2+3) \qquad (4)\quad \tan\,(2\,x)$$

解答. 合成関数の微分法則 (cf. 定理 3.4 (2)) から得られる微分公式 (3.3) (= 補題 3.3 の一般形) を用いればよい:

(1)
$$\begin{aligned}\left\{\,\sqrt{x^2+1}\,\right\}' = \left\{\,(x^2+1)^{1/2}\,\right\}' &\overset{[1]}{=} \frac{1}{2}\,(x^2+1)^{-1/2}\times(x^2+1)'\\ &= \frac{1}{2}\,(x^2+1)^{-1/2}\times 2\,x = x\,(x^2+1)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

(2) 一般に定数 $b\in\mathbb{R}$ (但し, $0<b\neq 1$ とする) に対して $b^x := e^{x\,\log b}$ と定義されることを思い出せば,

$$(\,2^x\,)' = \left(e^{x\log 2}\right)' \overset{[2]}{=} e^{x\log 2}\times(\,x\log 2\,)' = e^{x\log 2}\times\log 2 = 2^x\,\log 2.$$

(3)
$$\left\{\,\log\,(x^2+3)\,\right\}' \overset{[3]}{=} \frac{1}{x^2+3}\times(x^2+3)' = \frac{1}{x^2+3}\times 2\,x = \frac{2\,x}{x^2+3}.$$

(4)
$$\{\,\tan\,(2\,x)\,\}' \overset{[4]}{=} \frac{1}{\cos^2(2\,x)}\times(2\,x)' = \frac{1}{\cos^2(2\,x)}\times 2 = \frac{2}{\cos^2(2\,x)}.$$

□

練習問題 3.3. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\quad (x+1)^3\,(2\,x-3)^2 \qquad (2)\quad \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad (3)\quad \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \qquad (4)\quad \sin^2(2\,x)$$

解答. 注意 3.5 (2) でも述べたように, (補題 3.3 から合成関数の微分法則を用いて導き出された) **微分公式 (3.3) と四則演算 (和・差・積・商) の微分法則を組み合わせて考えればよい**:

(1)
$$\begin{aligned}\left\{\,(x+1)^3\,(2\,x-3)^2\,\right\}' &= \underline{\{\,(x+1)^3\,\}'}\times(2\,x-3)^2 + (x+1)^3\times\underline{\underline{\{\,(2\,x-3)^2\,\}'}}\\ &= \underline{\left\{\,3\,(x+1)^2\times 1\,\right\}}\times(2\,x-3)^2 + (x+1)^3\times\underline{\underline{\left\{\,2\,(2\,x-3)^1\times 2\,\right\}}}\\ &= \boldsymbol{3\,(x+1)^2\,(2\,x-3)^2 + 4\,(x+1)^3\,(2\,x-3)}\\ &= (x+1)^2\,(2\,x-3)\,\{\,3\,(2\,x-3)+4\,(x+1)\,\}\\ &= (x+1)^2\,(2\,x-3)\,(10\,x-5) = 5\,(x+1)^2\,(2\,x-3)\,(2\,x-1).\end{aligned}$$

(2) $$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\,\left(e^x-e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left\{(\,e^x\,)' - \underline{\left(e^{-x}\right)'}\right\} \qquad \left(※\ (\,e^{-x}\,)' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{e^x - \underline{e^{-x}\times(-x)'}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^x - \underline{(-e^{-x})}_{(※)}\right\} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

(3) はじめに, $\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\,\right)\right\}' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left\{1 + \underline{\underline{\left(\sqrt{x^2+1}\,\right)'}}\right\}.$

ここで, 練習問題 3.2 (1) でも求めた通り,

$$\underline{\underline{\left(\sqrt{x^2+1}\,\right)'}} = \left\{(x^2+1)^{1/2}\right\}' = \frac{1}{2}\,(x^2+1)^{-1/2} \times 2\,x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

従って,

$$\begin{aligned}\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}' &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left\{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\left\{\sin^2(2\,x)\,\right\}' &= 2\,\sin(2\,x) \times \underline{\left\{\sin(2\,x)\,\right\}'} = 2\,\sin(2\,x) \times \underline{\left\{\cos(2\,x) \times (\,2\,x\,)'\,\right\}}\\ &= 2\,\sin(2\,x) \times \{\cos(2\,x) \times 2\,\} = 4\,\sin(2\,x)\,\cos(2\,x).\end{aligned}$$ □

補足 (対数微分法)**.** 練習問題 3.3 (1) の微分は, (3.3) で述べた微分公式 [3] と (自然) 対数法則

$$\log(x_1\,x_2) = \log x_1 + \log x_2, \quad \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log x_1 - \log x_2, \quad \log(x^a) = a\,\log x \ (\text{但し},\ a \in \mathbb{R}\ \text{は定数とする}) \quad (*)$$

を組み合わせて, 次のような形で求めることもできる: $f(x) = (x+1)^3\,(2\,x-3)^2$ $\left(\text{但し},\ x \neq -1, \dfrac{3}{2}\right)$ とすると,

$$\log|f(x)| = \log\left(|x+1|^3\,|2\,x-3|^2\right) \overset{(*)}{=} 3\,\log|x+1| + 2\,\log|2\,x-3|.$$

この両辺を微分すると, 微分公式 [3] から,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \times \frac{(x+1)'}{x+1} + 2 \times \frac{(2\,x-3)'}{2\,x-3} = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{2\,x-3}.$$

従って, ここで得られた等式の両辺に $f(x)\ (\neq 0)$ を掛けることで,

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x) \times \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4}{2\,x-3}\right)\\ &= (x+1)^3\,(2\,x-3)^2 \times \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4}{2\,x-3}\right)\\ &= \mathbf{3\,(x+1)^2\,(2\,x-3)^2 + 4\,(x+1)^3\,(2\,x-3)}\\ &= (x+1)^2\,(2\,x-3)\,\{\,3\,(2\,x-3) + 4\,(x+1)\,\}\\ &= (x+1)^2\,(2\,x-3)\,(10\,x-5) = 5\,(x+1)^2\,(2\,x-3)\,(2\,x-1).\end{aligned}$$

(尚, $x = -1, \dfrac{3}{2}$ に対して $f'(x) = 0$ であることも容易に確かめられる.) このような微分の計算方法のことを, 一般に**対数微分法**という.

注意. このように, 基本的な関数の微分公式 (cf. 補題 3.3) を出発点として, 四則演算 (和・差・積・商) や合成関数の微分法則 (cf. 定理 3.4) を上手く組み合わせて考えれば, どのような関数 $f(x)$ に対しても, その微分 (導関数) $f'(x)$ を "必ず" 具体的に求めることができる[*5]. 尚, 上述の補足からもわかるように, 同じ関数であっても, その微分を計算する方法は一般に複数考えられるが, (理論的に正しい方法で得られたものであれば) 最終的に得られる結果は同じであるので, 各々にとって最も合理的であると感じられる方法を選んで計算すればよい.

[*5] 無論, 関数 $f(x)$ に対して, 実際に (3.1) の極限が収束する (すなわち, 導関数 $f'(x)$ が定義可能である) 場合でなければならない.

2021 年度 経済数学入門 II (第 4 回) 講義ノート[*1]

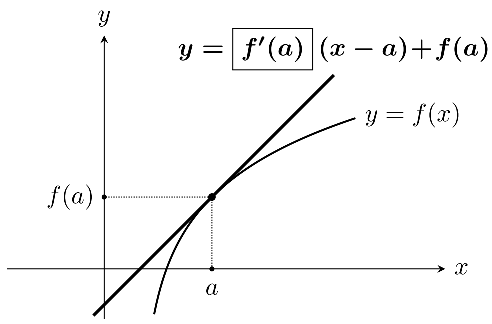
4　1 変数関数の微分計算の応用例

4.1　1 変数関数のグラフの作図法 (※経済数学入門 I の復習)

定義 3.1 から, (連続) 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ の $x = a$ $(\in X)$ における微分 (導関数) の値

$$f'(a) \overset{(3.1)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

は, xy-座標平面上での $y = f(x)$ $(x \in X)$ のグラフ[*2] の点 $(a, f(a))$ における $\boxed{\text{接線の傾き}}$ に等しいことがわかる:



定理 4.1. (連続) 関数 $f(x)$ ($x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$) に対して,

(1) $f'(x) = 0$ ($x \in (\alpha, \beta)$) $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ ($x \in [\alpha, \beta]$) は定数関数である.

$\big($ すなわち, $f(x) = C$ ($x \in [\alpha, \beta]$) となるような定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在する. $\big)$

また, 関数の "増減表" の議論の基本原理として, 次のようなこともいえる:

(2) $f'(x) > 0$ ($x \in (\alpha, \beta)$) $\underset{(\not\Longleftarrow)}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ ($x \in [\alpha, \beta]$) は **(狭義) 単調増加** (monotonically increasing) である.

$\big($ すなわち, $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$) $\Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. $\big)$

(3) $f'(x) < 0$ ($x \in (\alpha, \beta)$) $\underset{(\not\Longleftarrow)}{\Longrightarrow}$ $f(x)$ ($x \in [\alpha, \beta]$) は **(狭義) 単調減少** (monotonically decreasing) である.

$\big($ すなわち, $x_1 < x_2$ ($x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$) $\Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$. $\big)$

証明. これらの主張は, すべて (Lagrange の) 平均値定理を用いて実際に示される. □

例 4.2. 3 次関数 $f(x) = x^3$ ($x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) に対して, その微分は $f'(x) = 3x^2$ である (cf. 補題 3.3 (1)). 従って, 定理 4.1 から, そのグラフは次のような形であるといえる:

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ (単調増加)	0	$\nearrow$ (単調増加)

図 4.1　$f(x) = x^3$ の増減表

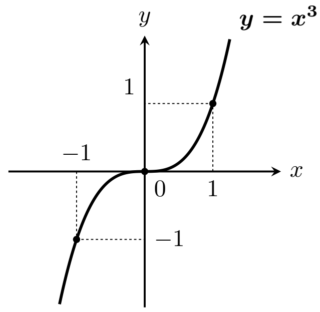


図 4.2　$f(x) = x^3$ のグラフ

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] すなわち, これは xy-座標平面上において方程式 $y = f(x)$ $(x \in X)$ を満たすような点 (x, y) 全体が描く (連続) 曲線のことである.

4.2　1 変数関数の極値問題の解法

定義 4.3 (**1 変数関数の極大・極小値 =“局所的” 最大・最小値**)**.** ある開区間 X ($\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) 上に定義された (連続) 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して, $f(x)$ が $\boldsymbol{x = a}$ $(\in X)$ **において極大値** (*locally* maximal value) **を取る**とは,

> <u>変数 x が点 a を中心とする適当な開区間 $(a-\delta, a+\delta)$</u> $(= \{\, x \in \mathbb{R} \mid a - \delta < x < a + \delta \,\})$ <u>$\subset X$ の上だけを動く</u>ように $f(x)$ を制限して考えたとき, $f(x)$ ($x \in (a-\delta, a+\delta)$) の最大値は $f(a)$ である

といえること, すなわち, 次の主張が成り立つような実数 $\delta > 0$ が存在することをいう:

$$x \in \underbrace{(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)}_{(a-\delta,\, a+\delta) \setminus \{a\}} \subset X \ \Big(\text{すなわち},\ 0 < |x - a| < \delta \ (x \in X)\Big) \Longrightarrow f(x) < \underbrace{f(a)}_{\text{極大値}}. \tag{4.1a}$$

同様に, $f(x)$ が $\boldsymbol{x = b}$ $(\in X)$ **において極小値** (*locally* minimal value) **を取る**とは, 次の主張が成り立つような実数 $\delta > 0$ が存在することをいう:

$$x \in \underbrace{(b-\delta, b) \cup (b, b+\delta)}_{(b-\delta,\, b+\delta) \setminus \{b\}} \subset X \ \Big(\text{すなわち},\ 0 < |x - b| < \delta \ (x \in X)\Big) \Longrightarrow f(x) > \underbrace{f(b)}_{\text{極小値}}. \tag{4.1b}$$

尚, 関数 $f(x)$ が取り得る極大値, 極小値のことをまとめて, $f(x)$ の**極値** (extremal value) という.

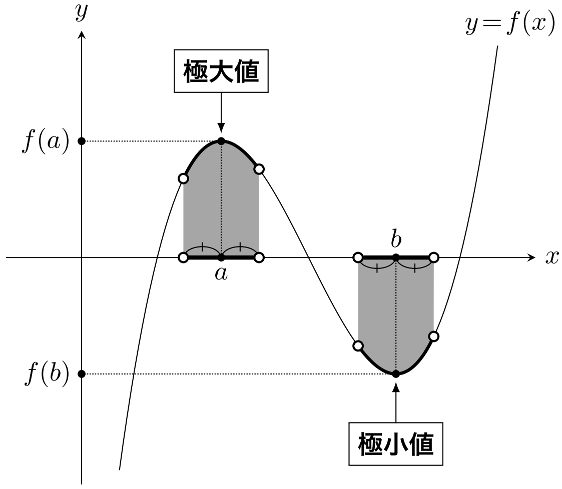


図 4.3　関数 $f(x)$ の極大値 $f(a)$ と極小値 $f(b)$

定理 4.4 (**極値を取るための必要条件 = 極値を与える点の候補を捜索する基準**)**.** 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$f(x) \text{ が } x = a \ (\in X) \text{ において極値 (すなわち, 極大値, 極小値のどちらか) を取る} \underset{(\not\Longleftarrow)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{f'(a) = 0}.$$

証明. 関数 $f(x)$ が $x = a$ において極大値を取るならば, 定義 4.3 の (4.1a) が成り立つような $\delta > 0$ を取ることで,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \ \ (\, x \in (a - \delta, a)\,), \qquad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \ \ (\, x \in (a, a + \delta)\,)$$

が成り立つといえる. これらの不等式に対して $\delta \longrightarrow 0$ とすることで, 極限の (広義) 単調性により,

$$\lim_{x \to a - 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \qquad \lim_{x \to a + 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

が得られる. 従って, $\displaystyle \lim_{x \to a - 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a + 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ であることから, $f'(a) = 0$ であるといえる. 同様にして, $f(x)$ が $x = a$ において極小値を取るならば, $f'(a) = 0$ でなければならないということも示される. □

注意. 定理 4.4 の逆の主張は, 一般に成立しない (実際, $f(x)=x^3$ に対しては, $f'(x)=3\,x^2$ より, $f'(0)=0$ であるといえるが, $f(0)=0$ は図 4.2 & 定義 4.3 から明らかに極値ではない). 従って, 定理 4.4 からは, あくまでも, (微分) 方程式 $f'(x)=0$ の解となるような $x=a$[*3]において, 関数 $f(x)$ は極値を取る可能性があるとしかいえない.

定理 4.5 (極値判定法 ①). 関数 $f(x)$ $(x\in X)$ および $a\in X$ に対して $f'(a)=0$ (cf. 定理 4.4) であったとすると, 更に, 導関数 $f'(x)$ の値の正負が $x=a$ の前後で変化 (反転) していれば, 実際に $f(x)$ は $x=a$ において極値を取る:

(i) $f'(x)>0$ ($x\in(a-\delta,a)$), $f'(x)<0$ ($x\in(a,a+\delta)$) (但し, $\delta>0$ とする) $\Longrightarrow f(a)$ は極大値である.

(ii) $f'(x)<0$ ($x\in(a-\delta,a)$), $f'(x)>0$ ($x\in(a,a+\delta)$) (但し, $\delta>0$ とする) $\Longrightarrow f(a)$ は極小値である.

証明. 実際に (i), (ii) の条件から $f(x)$ ($x\in(a-\delta,a+\delta)$) の増減表をみれば明らかである (cf. 定理 4.1 & 定義 4.3) :

(i) $f(a)$ が極大値となる場合:

x	$a-\delta$	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+\delta$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	

(ii) $f(a)$ が極小値となる場合:

x	$a-\delta$	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+\delta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	

□

例題 4.6. 定理 (4.4 &) 4.5 を踏まえて, 関数 $f(x)=3\,x^4-4\,x^3+2$ ($x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$) の極値をすべて求めよ.

解答. はじめに $f'(x)=\left(3\,x^4-4\,x^3+2\right)'=3\times4\,x^3-4\times3\,x^2+0=12\,x^3-12\,x^2=12\,x^2\,(x-1)$ であるので, 定理 4.4 から, $f'(x)=0\Longleftrightarrow x=0,\,1$ において $f(x)$ は極値を取る可能性があるといえる. そこで, $f(x)$ の増減表をもとに $f(0)$, $f(1)$ が $f(x)$ の極値であるか否かを, 実際に増減表をみて判定してみると,

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

であるので, 定理 4.5 (ii) から $f(1)=1$ は極小値であるが, $f(0)=2$ は (定義 4.3 から) 極値でないことがわかる. □

与えられた関数に対して, もう少し合理的な形で極値を求める方法を紹介するために, 次のような概念を導入する:

定義 4.7 (1 変数関数の高階微分). ある開区間 X $(\subset\mathbb{R}=(-\infty,\infty))$ の上で定義された関数 $f(x)$ $(x\in X)$ に対して, その導関数 $f'(x)$ $(x\in X)$ の微分 (導関数), すなわち,

$$\boldsymbol{f''(x)}\left(=\{\,f'(x)\,\}'\right):=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\quad(x\in X)\tag{4.2}$$

のことを, $f(x)$ の **2 階微分**[*4](あるいは, **2 階導関数**) という. より一般に,

$$\boldsymbol{f^{(0)}(x)}:=f(x),\quad\boldsymbol{f^{(1)}(x)}:=f'(x),\quad\boldsymbol{f^{(2)}(x)}:=f''(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{f^{(n)}(x)}:=\left\{\,f^{(n-1)}(x)\,\right\}',\ \cdots\tag{4.2'}$$

として定義される関数 $f^{(n)}(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ のことを, $f(x)$ の $\boldsymbol{n}$ **階微分** (あるいは, $\boldsymbol{n}$ **階導関数**) という.

例 4.8. $f(x)=x^3-3\,x^2$ ($x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$) に対して,

$$\begin{aligned}&f'(x)=\left(x^3-3\,x^2\right)'=3\,x^2-3\times2\,x=3\,x^2-6\,x,\\&f''(x)=\{\,f'(x)\,\}'=\left(3\,x^2-6\,x\right)'=3\times2\,x-6\times1=6\,x-6,\\&f'''(x)=\{\,f''(x)\,\}'=(\,6\,x-6\,)'=6\times1-0=6,\qquad f^{(n)}(x)=0\quad(n=4,5,\cdots).\end{aligned}$$

このように, 与えられた関数を (複数回) 繰り返して微分すれば, その高階微分 (高階導関数) が求められる.

[*3] 因みに, このような点 $a\in X$ のことを, 関数 $f(x)$ $(x\in X)$ の**停留点** (stationary point), あるいは, **臨界点** (critical point) という.

[*4] これは, 関数 $f(x)$ を 2 回繰り返して微分したものであるといえるので, $f(x)$ の **2 回微分**とも呼ばれる.

定理 4.9 (極値判定法 ②). 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して, その 2 階導関数 $f''(x)$ $(x \in X)$ は連続関数である[*5]$\cdots(\star)$ とすると, $a \in X$ に対して $f'(a) = 0$ (cf. 定理 4.4) かつ $\boldsymbol{f''(a) \neq 0}$ ならば, $f(x)$ は $x = a$ において極値を取る:

(i) $\boldsymbol{f''(a) < 0} \Longrightarrow f(a)$ は極大値である.　　(ii) $\boldsymbol{f''(a) > 0} \Longrightarrow f(a)$ は極小値である.

証明. (i) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ であるならば, 仮定 $(\star)$ により, ある充分小さい実数 $\delta > 0$ を取ることで

$$f''(x) < 0 \quad (\, x \in (a-\delta, a+\delta) \subset X \,)$$

であるといえる. 従って, 定理 4.1 (3) により, 導関数 $f'(x)$ は開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ において (狭義) 単調減少である. ここで, 更に $f'(a) = 0$ ならば,

$$f'(x) > 0 \;\; (\, x \in (a-\delta, a)\,), \quad f'(x) < 0 \;\; (\, x \in (a, a+\delta)\,)$$

が成り立つことになるので, 定理 4.5 (i) から, $f(a)$ は極大値であるといえる. (ii) 上の (i) と同様にして示される. □

例題 4.10. 定理 4.9 を用いて, 関数 $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ $(\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ の極値をすべて求めよ.

解答. 例 4.8 でも求めた通り,

$$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x = 3\,x\,(x-2), \qquad f''(x) = 6\,x - 6 = 6\,(x-1)$$

である. 従って, 定理 4.4 から, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, 2$ において $f(x)$ は極値を取る可能性があるといえる. ここで,

$$f''(0) = -6 < 0, \qquad f''(2) = 6 > 0$$

であるので, $f(0) = 0$ は定理 4.9 (i) から極大値, また, $f(2) = -4$ は定理 4.9 (ii) から極小値であるといえる. □

補足. 定理 4.9 では $f'(a) = f''(a) = 0$ となる場合に $f(a)$ が極値であるか否かについて言及されていないが, 実は, 更に高階の微分 $f^{(n)}(a)$ $(n = 3, 4, \cdots)$ の値を調べていけば, 以下のような形で極値か否かを判定することもできる:

定理 4.11 (極値判定法 ② の一般化). ある開区間 X $(\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ 上に定義された関数 $f(x)$ $(x \in X)$ および $a \in X$ に対して,

$$f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (\text{但し}, n \geq 2 \text{ とする})$$

であると仮定する (cf. (4.2')). このとき,

(1) n が偶数であるならば, $f(x)$ は $x = a$ において極値を取る:

(i) $f^{(n)}(a) < 0 \Longrightarrow f(a)$ は極大値である.　　(ii) $f^{(n)}(a) > 0 \Longrightarrow f(a)$ は極小値である.

(2) n が奇数であるならば, $f(x)$ は $x = a$ において極値を取らない.

証明. ここでは詳しく述べないが, (Lagrange の) 平均値定理の高階微分版 (**Taylor の定理**) を用いて示される. □

例 4.12 (例題 4.6 の別解)**.** 関数 $f(x) = 3\,x^4 - 4\,x^3 + 2$ $(\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ に対して,

$$f'(x) = 12\,x^3 - 12\,x^2 = 12\,x^2\,(x-1), \quad f''(x) = 36\,x^2 - 24\,x = 12\,x\,(3\,x-2), \quad f'''(x) = 72\,x - 24 = 24\,(3\,x-1).$$

従って, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 12 > 0$ であるので, 定理 4.11 (1-ii) から, $f(1) = 1$ は極小値である (cf. 定理 4.9 (ii)). 一方,

$$f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -24 \neq 0$$

であるので, 定理 4.11 (2) から, $f(0) = 2$ は極値ではないといえる.

[*5] このような関数 $f(x)$ $(x \in X)$ を, 数学では一般に $\boldsymbol{C^2}$ **級の関数**と呼ぶ. ※この講義で取り扱う (1 変数) 初等関数は, どれも C^2 級である.

2021 年度 経済数学入門 II (第 5 回) 講義ノート[*1]

5 多変数関数の偏微分法

以後, xy-座標平面上の領域 $X \subset \mathbb{R}^2$ $(= \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{\,(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}$ (cf. 定義 0.2 の補足) を定義域とする 2 変数関数 $f(x, y)$ $(\,(x, y) \in X\,)$ を議論の主な対象として考える. 尚, このような関数 $f(x, y)$ の値の変動は, xyz-座標空間内において方程式 $z = f(x, y)$ $(\,(x, y) \in X\,)$ を満たすような点 (x, y, z) 全体が描く曲面の形 (**グラフ**) を通して, 視覚的に理解することもできる. 例えば, xy-座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円盤 $X = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\,\}$ 上に定義される 2 変数関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $(\,(x, y) \in X\,)$ のグラフは,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \iff z^2 = 1 - x^2 - y^2 \ (\text{但し, } z \geq 0\,) \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ (\text{但し, } z \geq 0\,)$$

であることから, 以下の図 5.1 のような原点 $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面の "上半分" であるといえる[*2]:

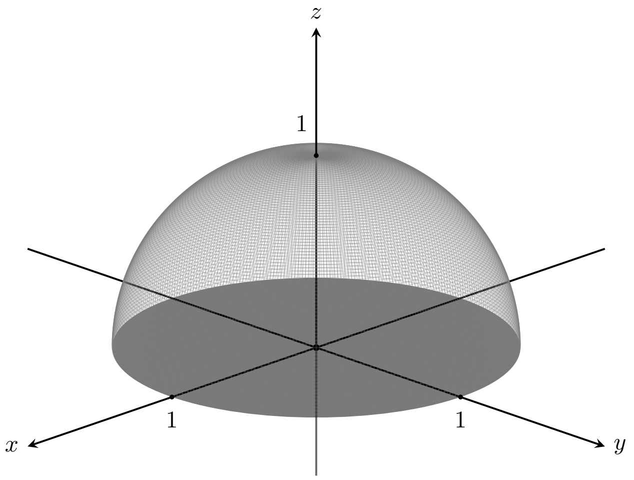


図 5.1 xyz-座標空間内における曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフ

注意. 1 変数関数の場合とは異なり, 実際に与えられた 2 変数関数のグラフ (曲面) を作図することは, それほど容易なことではない. 尚, 比較的簡単な議論によってグラフの形が理解できる例としては, 次のようなものが挙げられる[*3]:

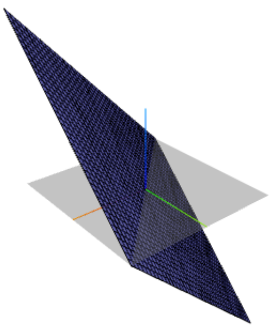


図 5.2 $f(x, y) = x - y$

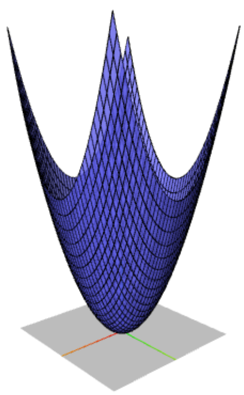


図 5.3 $f(x, y) = x^2 + y^2$

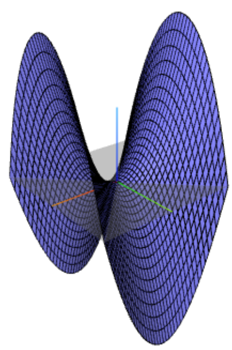


図 5.4 $f(x, y) = x^2 - y^2$

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] 因みに, 同じ球面の "下半分" は, 2 変数関数 $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, すなわち, $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフによって与えられる.

[*3] 図 5.2, 5.3 & 5.4 では, $f(x, y)$ の定義域を $X = [-2, 2] \times [-2, 2] = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2\,\}$ に制限している.

定義 5.1 (2 変数関数の偏微分)**.** xy-座標平面上のある領域 X ($\subset \mathbb{R}^2$) を定義域とする関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X$) に対して, 次のような極限を値とする関数のことを, $f(x,y)$ の **"変数 $\boldsymbol{x}$ に関する" 偏微分** (あるいは, **偏導関数**) という:

$$\boldsymbol{f_x(x,y)} \left(= \{\, \boldsymbol{f(x,y)}\,\}_{\boldsymbol{x}} \right) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad (\,(x,y)\in X\,) \tag{5.1x}$$

また同様に, $f(x,y)$ の **"変数 $\boldsymbol{y}$ に関する" 偏微分** (あるいは, **偏導関数**) を, 次のような関数として定義する:

$$\boldsymbol{f_y(x,y)} \left(= \{\, \boldsymbol{f(x,y)}\,\}_{\boldsymbol{y}} \right) := \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \quad (\,(x,y)\in X\,). \tag{5.1y}$$

これら 2 つをまとめて, $f(x,y)$ の**偏微分** (partial differentials), あるいは, **偏導関数** (partial derivatives) という.

補足. 1 変数関数を $y=f(x)$ とおくとき, その微分を $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ のように書き表す (Leibniz の) 表記法 (cf. 定義 3.1 の補足) の類似として, $z=f(x,y)$ とおくとき, その偏微分を

$$f_x(x,y) = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}} \left(= \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} \{\, \boldsymbol{f(x,y)}\,\} \right), \qquad f_y(x,y) = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}} \left(= \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}} \{\, \boldsymbol{f(x,y)}\,\} \right) \tag{5.1'}$$

と書き表すこともある. (尚, ここでの記号 "∂" は英小文字 d の筆記体から派生したものであることから "*cursive d*" あるいは, その形状から "*rounded d*" 等と読むのが一般的である.)

例 5.2. 関数 $f(x,y) = x\,y$ ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$) に対して, (5.1x) & (5.2y) より,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\,y - x\,y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,y}{h} = y, \\ f_y(x,y) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x\,(y+k) - x\,y}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k\,x}{k} = x. \end{aligned}$$

すなわち, $f(x,y)$ の偏微分 (偏導関数) は, それぞれ, 次のような形であるといえる:

$$f_x(x,y) = y, \quad f_y(x,y) = x \quad (\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,). \tag{$*$}$$

注意 5.3 (**偏微分の "合理的な" 計算法**)**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, ① **"$\boldsymbol{x}$ に関する"** 偏微分 $f_x(x,y)$ とは

関数 $f(x,y)$ を **"$\boldsymbol{y}$ を定数と考えて"** 変数 x について (1 変数関数として) 微分したもの

であり, また, ② **"$\boldsymbol{y}$ に関する"** 偏微分 $f_y(x,y)$ とは

関数 $f(x,y)$ を **"$\boldsymbol{x}$ を定数と考えて"** 変数 y について (1 変数関数として) 微分したもの

であるといえる (cf. 定義 3.1)[*4]. 従って, 上述の例 5.2 において実際に (5.1x), (5.1y) のような極限として求めた関数 $f(x,y) = x\,y$ の偏微分 ($*$) は, **1 変数関数の微分公式や微分法則を用いて**, 次のような形で簡単に求められる: 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(x\,y \right)_x = \left(x \right)_x y \quad (\because\ \textbf{定数倍の微分法則}) \\ &= 1 \times y = y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \left(x\,y \right)_y = x \left(y \right)_y \quad (\because\ \textbf{定数倍の微分法則}) \\ &= x \times 1 = x. \end{aligned}$$

例題 5.4. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, (注意 5.3 で述べた事実を踏まえて) 偏微分 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (2) $f(x,y) = \dfrac{2\,x+y}{x-y}$ (但し, $x \neq y$ とする) (3) $f(x,y) = e^{xy}$

解答. (1) 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して, (1 変数関数の) **和の微分法則**から,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(x^2 + y^2 \right)_x = \left(x^2 \right)_x + \left(y^2 \right)_x = 2\,x + 0 = 2\,x, \\ f_y(x,y) &= \left(x^2 + y^2 \right)_y = \left(x^2 \right)_y + \left(y^2 \right)_y = 0 + 2\,y = 2\,y. \end{aligned}$$

[*4] 実際, (5.1x), (5.1y) は, 2 つある変数 x, y の一方を固定して, もう一方の変数だけを動かして考えた $f(x,y)$ の平均変化率の極限である.

(2) 任意の $(x,y) \in X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \}$ に対して,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\frac{2\,x+y}{x-y} \right)_x = \frac{(\,2\,x+y\,)_x \times (x-y) - (2\,x+y) \times (\,x-y\,)_x}{(x-y)^2} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の})\ \textbf{商の微分法則}\,) \\ &= \frac{(2+0)\times(x-y)-(2\,x+y)\times(1-0)}{(x-y)^2} = \frac{2\,(x-y)-(2\,x+y)}{(x-y)^2} = -\frac{3\,y}{(x-y)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \left(\frac{2\,x+y}{x-y} \right)_y = \frac{(\,2\,x+y\,)_y \times (x-y) - (2\,x+y) \times (\,x-y\,)_y}{(x-y)^2} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の})\ \textbf{商の微分法則}\,) \\ &= \frac{(0+1)\times(x-y)-(2\,x+y)\times(0-1)}{(x-y)^2} = \frac{(x-y)+(2\,x+y)}{(x-y)^2} = \frac{3\,x}{(x-y)^2}. \end{aligned}$$

(3) 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\,e^{xy}\,)_x = e^{xy} \times (\,x\,y\,)_x \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の})\ \textbf{合成関数の微分法則};\ \text{特に},\ (3.3)\text{ の微分公式 }[\,2\,]\,) \\ &= e^{xy} \times (\,1 \times y\,) = y\,e^{xy}, \\ f_y(x,y) &= (\,e^{xy}\,)_y = e^{xy} \times (\,x\,y\,)_y \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の})\ \textbf{合成関数の微分法則};\ \text{特に},\ (3.3)\text{ の微分公式 }[\,2\,]\,) \\ &= e^{xy} \times (\,x \times 1\,) = x\,e^{xy}. \end{aligned}$$

以上の通り, 2 変数関数 $f(x,y)$ の偏微分を具体的に求める際は, 2 つの変数 x, y それぞれに関して $f(x,y)$ を (1 変数関数として) 微分するだけでよい. □

注意 5.5. 例題 5.4 の (3) の解答からもわかるように, (1 変数関数の) 合成関数の微分法則 (cf. 定理 3.4 (2)) により, 2 変数関数 $f(x,y)$ と 1 変数関数 $g(z)$ の合成関数として得られるような 2 変数関数 $g(f(x,y))$ に対して, その偏微分 (偏導関数) は, 一般に次のような形で与えられるといえる*5:

$$\{\,\boldsymbol{g}\boldsymbol{(}\,f(x,y)\,\boldsymbol{)}\,\}_x = \boldsymbol{g'}\boldsymbol{(}\,f(x,y)\,\boldsymbol{)} \times f_x(x,y), \quad \{\,\boldsymbol{g}\boldsymbol{(}\,f(x,y)\,\boldsymbol{)}\,\}_y = \boldsymbol{g'}\boldsymbol{(}\,f(x,y)\,\boldsymbol{)} \times f_y(x,y). \tag{5.2}$$

更に, 2 変数関数 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ と 2 変数関数 $g(z,w)$ の合成関数 $g(f_1(x,y), f_2(x,y))$ に対して,

$$\begin{aligned} \{\,\boldsymbol{g}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)}\,\}_x &= \boldsymbol{g_z}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)} \times \{\,f_1(x,y)\,\}_x + \boldsymbol{g_w}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)} \times \{\,f_2(x,y)\,\}_x, \\ \{\,\boldsymbol{g}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)}\,\}_y &= \boldsymbol{g_z}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)} \times \{\,f_1(x,y)\,\}_y + \boldsymbol{g_w}\boldsymbol{(}f_1(x,y),f_2(x,y)\boldsymbol{)} \times \{\,f_2(x,y)\,\}_y \end{aligned} \tag{5.2'}$$

が一般に成り立つことも知られている. 尚, この等式 (5.2') は, 2 変数関数の偏微分の**連鎖律** (chain rule) と呼ばれる.

補足 (多変数関数の偏微分)**.** $n \geq 2$ として, 一般に n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の偏微分 (偏導関数) も, 定義 5.1 と同様にして定義される:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f_{x_i}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)} \left(= \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x_i}} \,\boldsymbol{\{\,f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\,\}} \right) \\ &:= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1,\cdots,\boxed{x_i+h},\cdots,x_n) - f(x_1,\cdots,\boxed{x_i},\cdots,x_n)}{h} \qquad (i = 1,2,\cdots,n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

(尚, これらを計算する方法も, 基本的には ($n=2$ の場合に) 注意 5.3 & 例題 5.4 で述べた方法と全く同じである.)

練習問題 5. 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, その偏微分 (偏導関数) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

$$(1)\quad f(x,y) = (x+y)\,\sin y \qquad (2)\quad f(x,y) = xy^2\,e^{x^2 y} \qquad (3)\quad f(x,y) = \log\,(e^x + e^{-y})$$

解答. (1) 注意 5.3 で述べた通り, $f(x,y) = (x+y)\,\sin y$ を (y を定数と考えて) 変数 x について微分すると,

$$f_x(x,y) = \{(x+y)\,\sin y\}_x = (x+y)_x\,\sin y = (1+0)\,\sin y = \boldsymbol{\sin y}.$$

*5 因みに, 3 変数以上の多変数関数に対しても, 全く同様のことがいえる.

また, 同様に, $f(x,y)=(x+y)\sin y$ を (x を定数と考えて) 変数 y について微分すると,

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \{(x+y)\,\sin y\}_y = (x+y)_y \times \sin y + (x+y)\times(\sin y)_y \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 積の微分法則}) \\ &= (0+1)\times \sin y + (x+y)\times\cos y = \boldsymbol{\sin y + (x+y)\ \cos y}. \end{aligned}$$

(2) 前問 (1) と同様に, $f(x,y)=xy^2\,e^{x^2y}$ を変数 x, y それぞれについて微分すると,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(xy^2\,e^{x^2y}\right)_x \\ &= \underline{(xy^2)_x} \times e^{x^2y} + xy^2 \times \underline{(e^{x^2y})_x} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 積の微分法則}) \\ &= \underline{\ y^2\ } \times e^{x^2y} + xy^2 \times \underline{e^{x^2y}\times(x^2y)_x} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 合成関数の微分法則; 特に, (3.3) の [2]}) \\ &= y^2\,e^{x^2y} + xy^2\times \underline{e^{x^2y}\times 2\,xy} = (y^2+2\,x^2y^3)\,e^{x^2y} = \boldsymbol{y^2\,(1+2\,x^2y)\,e^{x^2y}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \left(xy^2\,e^{x^2y}\right)_y \\ &= \underline{(xy^2)_y} \times e^{x^2y} + xy^2 \times \underline{(e^{x^2y})_y} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 積の微分法則}) \\ &= \underline{\ 2\,xy\ } \times e^{x^2y} + xy^2 \times \underline{e^{x^2y}\times(x^2y)_y} \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 合成関数の微分法則; 特に, (3.3) の [2]}) \\ &= 2\,xy\,e^{x^2y} + xy^2\times \underline{e^{x^2y}\times x^2} = (2\,xy+x^3y^2)e^{x^2y} = \boldsymbol{xy\,(2+x^2y)\,e^{x^2y}}. \end{aligned}$$

(3) $f(x,y)=\log(e^x+e^{-y})$ に対しても, 前問 (1), (2) と同様に,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left\{\log(e^x+e^{-y})\right\}_x \\ &= \frac{1}{e^x+e^{-y}} \times \left(e^x+e^{-y}\right)_x \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 合成関数の微分法則; 特に, (3.3) の [3]}) \\ &= \frac{1}{e^x+e^{-y}} \times (e^x+0) = \boldsymbol{\frac{e^x}{e^x+e^{-y}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \left\{\log(e^x+e^{-y})\right\}_y \\ &= \frac{1}{e^x+e^{-y}} \times \left(e^x+e^{-y}\right)_y \quad (\because\ (1\text{ 変数関数の}) \text{ 合成関数の微分法則; 特に, (3.3) の [3]}) \\ &= \frac{1}{e^x+e^{-y}} \times \left\{0+\underline{\left(e^{-y}\right)_y}\right\} = \frac{1}{e^x+e^{-y}} \times \underline{\left(-e^{-y}\right)} = \boldsymbol{-\frac{e^{-y}}{e^x+e^{-y}}}. \end{aligned}$$

□

注意. 上の解答からもわかる通り, 注意 5.5 で述べた (1 変数の) 合成関数の微分法則から得られる偏微分法則 (5.2) を踏まえて, (1 変数関数の) 四則演算の微分法則 (cf. 定理 3.4 (1)) を変数 x, y それぞれについて考えれば, どのような 2 変数関数 $f(x,y)$ に対しても "必ず" 偏微分 (偏導関数) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が具体的な形で求められる.

補足 (練習問題 5 (3) の別解)**.** $g(z,w)=\log(z+w)$ とおくと, $f(x,y)=\log(e^x+e^{-y})=g(e^x,e^{-y})$ である. ここで,

$$g_z(z,w) = \{\log(z+w)\}_z = \frac{(z+w)_z}{z+w} = \frac{1}{z+w}, \qquad g_w(z,w) = \{\log(z+w)\}_w = \frac{(z+w)_w}{z+w} = \frac{1}{z+w}.$$

また,

$$(e^x)_x = e^x, \qquad (e^x)_y = 0, \qquad (e^{-y})_x = 0, \qquad (e^{-y})_y \left(= e^{-y}\times\underline{(-y)_y}\right) = -e^{-y}.$$

従って, 注意 5.5 で述べた (2 変数関数の) 偏微分の連鎖律 (5.2') から,

$$f_x(x,y) = g_z(e^x,e^{-y})\times(e^x)_x + g_w(e^x,e^{-y})\times\left(e^{-y}\right)_x = \frac{1}{e^x+e^{-y}}\times e^x + \frac{1}{e^x+e^{-y}}\times 0 = \frac{e^x}{e^x+e^{-y}},$$

$$f_y(x,y) = g_z(e^x,e^{-y})\times(e^x)_y + g_w(e^x,e^{-y})\times\left(e^{-y}\right)_y = \frac{1}{e^x+e^{-y}}\times 0 + \frac{1}{e^x+e^{-y}}\times(-e^{-y}) = -\frac{e^{-y}}{e^x+e^{-y}}.$$

2021 年度 経済数学入門 II (第 6 回) 講義ノート[*1]

6　2 変数関数の偏微分法についての補足事項

6.1　2 変数関数の偏微分と曲面の接平面

1 変数関数 $f(x)$ ($x \in X \subset \mathbb{R}$) に対して, xy-座標平面上の曲線 $y = f(x)$ $(x \in X)$ に**点 $(a, f(a))$ で接する直線** (**接線**) の方程式は, 第 4.1 節でも述べた通り, 次のような形で具体的に与えられる:

$$
\begin{aligned}
y = f(a) + f'(a)\,(x-a) \Longleftrightarrow y - f(a) = f'(a)\,(x-a) &\Longleftrightarrow -f'(a)\,(x-a) + \{y - f(a)\} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

すなわち, この接線と直交する法ベクトルは $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -f'(a) \\ 1 \end{pmatrix}$ であるといえる (cf. 定義 2.10 (1) & 図 6.1).

定理 6.1. 2 変数関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) に対して, xyz-座標空間内の曲面 $z = f(x,y)$ ($(x,y) \in X$) に**点 $(a, b, f(a,b))$ で接する平面** (これを, 接線と同様に, **接平面**という) と直交する法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は,

$$
\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{pmatrix}
$$

である (cf. 定義 2.10 (2) & 図 6.2). すなわち, この接平面の方程式は, 次のような形で具体的に与えられる:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -f_x(a,b) \\ -f_y(a,b) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix} = 0 &\Longleftrightarrow -f_x(a,b)\,(x-a) - f_y(a,b)\,(y-b) + \{z - f(a,b)\} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \boldsymbol{z = f(a,b) + f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b)}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

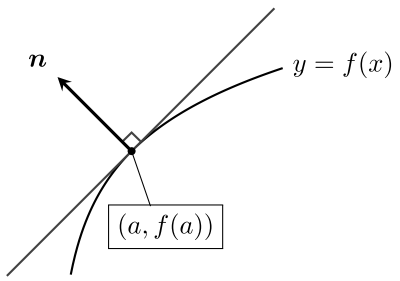


図 6.1　曲線の接線と法ベクトル

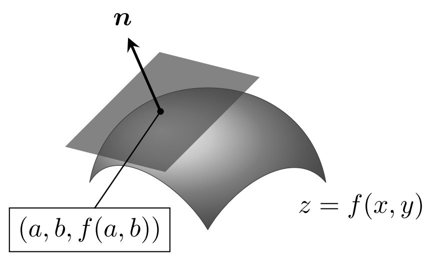


図 6.2　曲面の接平面と法ベクトル

証明. 曲面 $z = f(x,y)$ ($(x,y) \in X$) が点 $(a, b, f(a,b))$ において接平面を持つための必要充分条件は,

$$
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\, f(a+h, b+k) - f(a,b) - \alpha\, h - \beta\, k \,|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \tag{6.3}
$$

となるような定数 α, β $(\in \mathbb{R})$ が存在することである. (実際, 曲面 $z = f(x,y)$ が点 $(a, b, f(a,b))$ において平面 $z = f(a,b) + \alpha\,(x-a) + \beta\,(y-b)$ と接していることは, 2 変数関数の極限の概念 (cf. 後述の定義 6.2 (1)) を用いて,

$$
\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|\, f(x,y) - f(a,b) - \alpha\,(x-a) - \beta\,(y-b) \,|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \tag{6.3'}
$$

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

が成り立つということで表現できる．）ここで, もし極限式 (6.3) が成り立つならば, 特に "$k = 0$" として左辺の極限を $(h, 0) \to (0, 0)$ (すなわち, $h \to 0$) に置き換えて考えても同様に成立するので,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{|\,f(a+h,b)-f(a,b)-\alpha\,h\,|}{\sqrt{h^2}} &= \lim_{h\to 0}\frac{|\,f(a+h,b)-f(a,b)-\alpha\,h\,|}{|h|}\\ &= \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h,b)-f(a,b)-\alpha\,h}{h}\right|\\ &= \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}-\alpha\right| = 0.\end{aligned}$$

すなわち, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \alpha \overset{(5.1x)}{\iff} f_x(a,b) = \alpha$ であるといえる．同様に, 極限式 (6.3) を "$h = 0$" として考えることで,

$$\lim_{k\to 0}\frac{|f(a,b+k)-f(a,b)-\beta\,k|}{\sqrt{k^2}} = \lim_{k\to 0}\left|\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}-\beta\right| = 0.$$

すなわち, $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = \beta \overset{(5.1y)}{\iff} f_y(a,b) = \beta$ が得られる． □

6.2　2 変数関数の"極限"と"連続性"の概念 (※読み飛ばし可)

定義 6.2 (2 変数関数の極限・連続性)**.** (1) xy-座標平面上のある領域 X ($\subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$) で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ および $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

点 $(x, y) \in X$ を任意に動かして点 (a, b) に限りなく近付ける (これを $\boldsymbol{(x, y) \to (a, b)}$ と書く) とき,
関数 $f(x, y)$ の値は, 点 (x, y) の動かし方に依らず, 常にある一定の値 $\alpha \in \mathbb{R}$ へと限りなく近付く

といえる場合, 関数 $f(x, y)$ の ($(x, y) \to (a, b)$ としたときの) **極限** (limit) は α に等しいといい, これを省略して,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha \qquad \left(\text{あるいは, } f(x,y) \longrightarrow \alpha \ \ (\,(x,y)\to(a,b)\,)\right)$$

と書き表す．

(2) 関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) および 点 $(a, b) \in X$ に対して,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b) \tag{6.4}$$

が成り立つとき, $f(x, y)$ は **"点 $\boldsymbol{(a, b)}$ において" 連続**であるという[*2]．更に, $f(x, y)$ が <u>領域 X の全ての点において</u>連続であるとき, 関数 $f(x, y)$ は **"$\boldsymbol{X}$ において" 連続**であるという (あるいは, より簡潔に, $f(x, y)$ ($(x, y) \in X$) は **(2 変数) 連続関数** であるともいう．)

例 6.3. 関数 $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y$ ($(x, y) \in X = \mathbb{R}^2$) は連続関数である．実際, 任意の $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 極限式 (6.4) が成り立つことは, 以下の通り, 明らかである:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a = f_1(a,b), \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b = f_2(a,b).$$

補題 6.4. (1) 連続関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ ($(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) に対して, それらの和・差・積・商として次のような形で得られる (2 変数) 関数は, すべて連続関数である*:*

$$f(x,y) \pm g(x,y), \quad f(x,y)\,g(x,y), \quad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}\ (\,(x,y) \in \{\,(x,y)\in X \mid g(x,y)\neq 0\,\}\,)$$

(2) 連続関数 $f(x, y)$ ($(x, y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) と (1 変数) 連続関数 $g(z)$ ($z \in \underbrace{f(X)}_{f\text{ の値域}} \subset \mathbb{R}$) に対して, その合成関数 $g(f(x, y))$ ($(x, y) \in X$) もまた (2 変数) 連続関数である．

[*2] これは, 曲面 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in X$) が点 $(a, b, f(a, b))$ で周りと "繋がっている" ことを意味する．

注意 6.5. 例 6.3 および 補題 6.4 (1) により,

$$2\text{ 変数有理関数}^{*3}\text{は, 一般に, その定義域全体において連続である} \tag{6.5}$$

といえる. (更に, このことから, 補題 6.4 (2) により,

$$\sqrt{x^2+y^2}, \quad e^{xy}, \quad \log(x^4+y^2) \ \ (\,(x,y)\neq(0,0)\,), \quad \sin(x^3-y^3), \quad \cdots$$

のような 2 変数有理関数と 1 変数連続関数の合成関数もまた, 一般に (2 変数) 連続関数であるということもわかる.)

尚, 以下のように場合分けの議論を用いて定義された 2 変数関数の連続性については, 少し注意が必要である:

例 6.6. (1) xy-座標平面全体で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (\,(x,y)\neq(0,0)\,),\\[2ex] 0 & (\,(x,y)=(0,0)\,)\end{cases}$$

は, 原点 $(0,0)$ において連続である: 実際, $(x,y)\neq(0,0)$ に対して, その**極座標表示**

$$x=r\,\cos\theta, \quad y=r\,\sin\theta \quad (\text{ここで, } r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ とし, また, } 0\leq\theta<2\pi \text{ は点 } (x,y) \text{ の偏角とする}) \tag{$*$}$$

を用いれば,

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\frac{r^3\cos^2\theta\,\sin\theta}{r^2}=r\,\cos^2\theta\,\sin\theta\longrightarrow 0 \quad (\,(x,y)\to(0,0)\Longleftrightarrow r\to 0\,).$$

すなわち, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ であるので, 定義 6.2 (2) から, $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続である.

(2) xy-座標平面全体で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & (\,(x,y)\neq(0,0)\,),\\[2ex] 0 & (\,(x,y)=(0,0)\,)\end{cases}$$

は, **原点 $(0,0)$ において連続ではない**: 実際, $(x,y)\neq(0,0)$ に対して, その極座標表示 $(*)$ を用いると,

$$f(x,y)=\frac{x\,y}{x^2+y^2}\overset{(*)}{=}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\,\sin\theta=\frac{1}{2}\sin(2\,\theta) \quad (\because\ \text{正弦関数の 2 倍角公式}).$$

このことから, 点 $(x,y)\neq(0,0)$ が x-座標軸 ($\theta=0,\pi$ の場合), あるいは, y-座標軸 ($\theta=\pm\pi/2$ の場合) の上だけを通って原点 $(0,0)$ に近付いたとき, 関数 $f(x,y)$ の値は $0=f(0,0)$ に限りなく近付くといえるが, 点 $(x,y)\neq(0,0)$ がそれ以外の軌道を通って原点 $(0,0)$ に近付いたときには関数 $f(x,y)$ は 0 でない値に近付くことになる. (例えば, 点 $(x,y)\neq(0,0)$ が直線 $y=x$ の上だけを通って原点 $(0,0)$ に近付いたとき, 実際に $f(x,y)$ の値が近付く先は

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(\,y=x\,)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\,x^2}=\frac{1}{2}$$

である.) すなわち, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は, そもそも存在しないので, $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続ではない.

定義 6.7 (2 変数関数の C^1 級性)**.** 関数 $f(x,y)$ ($(x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2$) に対して, その偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ ($(x,y)\in X$) が共に連続関数であるとき, $f(x,y)$ は (領域 X において) $\boldsymbol{C^1}$ **級**[*4]であるという.

[*3] 例えば, $x+y$, $x\,y$, x^2+y^2, $x^3+2\,x^2\,y+y^3$, $\cdots$ のように単項式 $x^i\,y^j$ $(i,j\geq 0)$ の (実) 定数倍の有限和として表される (2 変数) 関数を **2 変数多項式**といい, 更に, 2 変数多項式の商として定義される $\dfrac{x\,y}{x-y}$ $(x\neq y)$, $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\cdots$ のような形の (2 変数) 関数のことを, 一般に **2 変数有理関数**という.

[*4] あるいは, **連続 (1 階) 偏微分可能**であるともいう.

6.3　2 変数関数の高階偏微分

定義 6.8 (2 変数関数の 2 階偏微分・C^2 級性)**.** 関数 $f(x,y)$ ($(x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2$) に対して, その偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ ($(x,y)\in X$) の偏微分 (偏導関数), すなわち,

$$\boldsymbol{f_{xx}(x,y)} := \{\,f_x(x,y)\,\}_x\,,\quad \boldsymbol{f_{xy}(x,y)} := \{\,f_x(x,y)\,\}_y\,,$$
$$\boldsymbol{f_{yx}(x,y)} := \{\,f_y(x,y)\,\}_x\,,\quad \boldsymbol{f_{yy}(x,y)} := \{\,f_y(x,y)\,\}_y\quad (\,(x,y)\in X\,) \tag{6.6}$$

のことを, 関数 $f(x,y)$ の **2 階偏微分** (あるいは, **2 階偏導関数**) という. また, 関数 $f(x,y)$ ($(x,y)\in X$) に対して, その 2 階偏導関数 (6.6) がすべて連続関数であるといえるとき, $f(x,y)$ は (領域 X において) $\boldsymbol{C^2}$ **級**[*5]であるという.

注意 6.9. $z=f(x,y)$ ($(x,y)\in X$) とおくとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_y(x,y)$ (cf. (5.1')) とも表記することから,

$$f_{xx}(x,y)=\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\left(=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right),\qquad f_{xy}(x,y)=\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}}\left(=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right),$$
$$f_{yx}(x,y)=\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}\left(=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right),\qquad f_{yy}(x,y)=\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\left(=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right)$$

と書き表すこともある.

補足. この講義では取り扱わないが, 定義 6.8 と同様に, $n\geq 3$ の場合にも関数 $f(x,y)$ に対して $\boldsymbol{n}$ **階偏微分 (**$\boldsymbol{n}$ **階偏導関数)**, $\boldsymbol{C^n}$ **級性**の概念が導入される. また, 3 変数以上の多変数関数に対しても全く同様に高階偏微分が考えられる.

例 6.10. 関数 $f(x,y)=x^2+x\,y+y^2$ ($(x,y)\in X=\mathbb{R}^2$) に対して, その (1 階) 偏導関数は

$$f_x(x,y)=\left(x^2+x\,y+y^2\right)_x=2\,x+y,\qquad f_y(x,y)=\left(x^2+x\,y+y^2\right)_y=x+2\,y$$

である. 従って, $f(x,y)$ の 2 階偏導関数 (6.6) は

$$f_{xx}(x,y)=(\,2\,x+y\,)_x=2,\qquad f_{xy}(x,y)=(\,2\,x+y\,)_y=1,$$
$$f_{yx}(x,y)=(\,x+2\,y\,)_x=1,\qquad f_{yy}(x,y)=(\,x+2\,y\,)_y=2$$

である. 以上の結果から, $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ ($(x,y)\in\mathbb{R}^2$) は連続関数であるといえるので, $f(x,y)$ は (xy-座標平面全体 $\mathbb{R}^2$ において) C^2 級である.

練習問題 6.1. xyz-座標空間において, 図 5.1 で紹介した, 原点 $\mathrm{O}=(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の半球面 $x^2+y^2+z^2=1$ (但し, $z\geq 0$ とする) に点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で接する平面 (接平面) の方程式を求めよ.

解答. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $\left((x,y)\in X=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 1\,\}\right)$ とすると, 各点 $(x,y)\in X$ に対して,

$$f_x(x,y)=\left\{\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}_x=\left\{\left(1-x^2-y^2\right)^{1/2}\right\}_x=\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)^{-1/2}\times\left(1-x^2-y^2\right)_x$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\times(-2\,x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

同様にして, $f_y(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ であることもわかる. 従って, 定理 6.1 から, 問題の接平面の方程式は

$$z\overset{(6.2)}{=}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f_y\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left(y-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

すなわち, $z=\sqrt{3}-x-y\Longleftrightarrow x+y+z=\sqrt{3}$ であるといえる. □

[*5] あるいは, **連続 2 階偏微分可能**であるともいう.

練習問題 6.2. 次の関数 $f(x,y)$ に対して, その 2 階偏微分 (2 階偏導関数) をすべて求めよ.

$$(1)\quad f(x,y)=x^5\,y^3 \qquad (2)\quad f(x,y)=e^{x^2 y} \qquad (3)\quad f(x,y)=\sin(2\,x+3\,y)$$

解答. (1) 定数倍の微分法則から,

$$f_x(x,y)=\big(x^5\,y^3\big)_x=\big(x^5\big)_x\times y^3=5\,x^4\,y^3, \qquad f_y(x,y)=\big(x^5\,y^3\big)_y=x^5\times\big(y^3\big)_y=3\,x^5\,y^2.$$

従って,

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)&=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_x=\big(5\,x^4\,y^3\big)_x=\big(5\,x^4\big)_x\times y^3=\big(5\times 4\,x^3\big)\times y^3=\boldsymbol{20\,x^3\,y^3},\\
f_{xy}(x,y)&=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_y=\big(5\,x^4\,y^3\big)_y=5\,x^4\times\big(y^3\big)_y=5\,x^4\times 3\,y^2=\boldsymbol{15\,x^4\,y^2},\\
f_{yx}(x,y)&=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_x=\big(3\,x^5\,y^2\big)_x=\big(3\,x^5\big)_x\times y^2=\big(3\times 5\,x^4\big)\times y^2=\boldsymbol{15\,x^4\,y^2},\\
f_{yy}(x,y)&=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_y=\big(3\,x^5\,y^2\big)_y=3\,x^5\times\big(y^2\big)_y=3\,x^5\times 2\,y=\boldsymbol{6\,x^5\,y}.
\end{aligned}$$

(2) 合成関数の微分法則 (cf. (3.3) の微分公式 [2]) から,

$$f_x(x,y)=\big(e^{x^2 y}\big)_x=e^{x^2 y}\times\big(x^2\,y\big)_x=2\,x\,y\,e^{x^2 y}, \qquad f_y(x,y)=\big(e^{x^2 y}\big)_y=e^{x^2 y}\times\big(x^2\,y\big)_y=x^2\,e^{x^2 y}.$$

従って, 積の微分法則から,

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_x&=\big(2\,x\,y\,e^{x^2 y}\big)_x\\
&=\big(2\,x\,y\big)_x\times e^{x^2 y}+2\,x\,y\times\underline{\big(e^{x^2 y}\big)_x}\\
&=2\,y\times e^{x^2 y}+2\,x\,y\times\ \underline{2\,x\,y\,e^{x^2 y}}\ =\boldsymbol{2\,y\,e^{x^2 y}+4\,x^2\,y^2\,e^{x^2 y}=2\,y\,(1+2\,x^2\,y)\,e^{x^2 y}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{xy}(x,y)=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_y&=\big(2\,x\,y\,e^{x^2 y}\big)_y\\
&=\big(2\,x\,y\big)_y\times e^{x^2 y}+2\,x\,y\times\underline{\big(e^{x^2 y}\big)_y}\\
&=2\,x\times e^{x^2 y}+2\,x\,y\times\ \underline{x^2\,e^{x^2 y}}\ =\boldsymbol{2\,x\,e^{x^2 y}+2\,x^3\,y\,e^{x^2 y}=2\,x\,(1+x^2\,y)\,e^{x^2 y}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yx}(x,y)=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_x&=\big(x^2\,e^{x^2 y}\big)_x\\
&=\big(x^2\big)_x\times e^{x^2 y}+x^2\times\underline{\big(e^{x^2 y}\big)_x}\\
&=2\,x\times e^{x^2 y}+x^2\times\ \underline{2\,x\,y\,e^{x^2 y}}\ =\boldsymbol{2\,x\,e^{x^2 y}+2\,x^3\,y\,e^{x^2 y}=2\,x\,(1+x^2\,y)\,e^{x^2 y}},
\end{aligned}$$

$$f_{yy}(x,y)=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_y=\big(x^2\,e^{x^2 y}\big)_y=x^2\times\underline{\big(e^{x^2 y}\big)_y}=x^2\times\ \underline{x^2\,e^{x^2 y}}\ =\boldsymbol{x^4\,e^{x^2 y}}.$$

(3) 合成関数の微分法則 (cf. (3.3) の微分公式 [4]) から,

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\{\sin(2\,x+3\,y)\,\}_x=\cos(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_x=2\,\cos(2\,x+3\,y),\\
f_y(x,y)&=\{\sin(2\,x+3\,y)\,\}_y=\cos(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_y=3\,\cos(2\,x+3\,y).
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y)=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_x&=\big\{\,2\,\cos(2\,x+3\,y)\,\big\}_x\\
&=2\times\{\,-\sin(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_x\,\}=\boldsymbol{-4\,\sin(2\,x+3\,y)},\\
f_{xy}(x,y)=\big\{\,f_x(x,y)\,\big\}_y&=\big\{\,2\,\cos(2\,x+3\,y)\,\big\}_y\\
&=2\times\{\,-\sin(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_y\,\}=\boldsymbol{-6\,\sin(2\,x+3\,y)},\\
f_{yx}(x,y)=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_x&=\big\{\,3\,\cos(2\,x+3\,y)\,\big\}_x\\
&=3\times\{\,-\sin(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_x\,\}=\boldsymbol{-6\,\sin(2\,x+3\,y)},\\
f_{yy}(x,y)=\big\{\,f_y(x,y)\,\big\}_y&=\big\{\,3\,\cos(2\,x+3\,y)\,\big\}_y\\
&=3\times\{\,-\sin(2\,x+3\,y)\times(2\,x+3\,y)_y\,\}=\boldsymbol{-9\,\sin(2\,x+3\,y)}.
\end{aligned}$$

□

注意. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, その 2 階偏微分 (2 階偏導関数) として $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ の 4 種類の 2 変数関数が得られるのが一般的であるのだが, 練習問題 6.2 の解答をみてもわかるように, 実は, 特定の条件を満たすような 2 変数関数 $f(x,y)$ に対しては, 次のようなことがいえる:

定理 6.11. *2 変数関数* $f(x,y)$ $(\,(x,y)\in X\subset\mathbb{R}^2\,)$ が C^2 級 (cf. 定義 6.8) であるときには,

$$\boldsymbol{f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)}\quad (\,(x,y)\in X\,).$$

証明. (1 変数関数に対する) 平均値定理を用いて証明することができる: 実際, 任意の点 $(a,b)\in X$ に対して,

$$g(x):=f(x,y)-f(x,b),\qquad h(y):=f(x,y)-f(a,y)\qquad (\,(x,y)\in X\,)$$

とおくと,

$$\begin{aligned} g(x)-g(a)&=\{\,f(x,y)-f(x,b)\,\}-\{\,f(a,y)-f(a,b)\,\}=f(x,y)-f(x,b)-f(a,y)+f(a,b),\\ h(y)-h(b)&=\{\,f(x,y)-f(a,y)\,\}-\{\,f(x,b)-f(a,b)\,\}=f(x,y)-f(a,y)-f(x,b)+f(a,b). \end{aligned}$$

すなわち, 一般に $g(x)-g(a)=h(y)-h(b)$ である. そこで,

$$F(x,y):=g(x)-g(a)=h(y)-h(b)\quad (\,(x,y)\in X\,)$$

とおくことにする. まず, y を固定して, $F(x,y)=g(x)-g(a)$ に平均値定理を適用することで,

$$F(x,y)=g'(a+\theta_1(x-a))\times(x-a)=\big\{f_x(a+\theta_1(x-a),y)-f_x(a+\theta_1(x-a),b)\big\}\times(x-a)$$

となる $0<\theta_1<1$ が存在するといえる. 更に, この右辺を y の関数として平均値定理を適用することで,

$$F(x,y)=f_{xy}(a+\theta_1(x-a),b+\theta_2(y-b))\times(x-a)(y-b)\quad (0<\theta_1,\,\theta_2<1).$$

同様に, $F(x,y)=h(y)-h(b)$ に対して平均値定理を 2 度繰り返して適用することで,

$$F(x,y)=f_{yx}(a+\theta_3(x-a),b+\theta_4(y-b))\times(x-a)(y-b)\quad (0<\theta_3,\,\theta_4<1).$$

従って, 任意の $(x,y)\neq(a,b)$ に対して, 一般に次のような等式が成立するといえる:

$$f_{xy}(a+\theta_1(x-a),b+\theta_2(y-b))=\frac{F(x,y)}{(x-a)\,(y-b)}=f_{yx}(a+\theta_3(x-a),b+\theta_4(y-b)).$$

このことを踏まえて, もし $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ $(\,(x,y)\in X\,)$ が連続関数であるならば, 定義 6.2 (2) より,

$$\begin{aligned} f_{xy}(a,b)&\overset{(6.4)}{=}\lim_{(x,y)\to(a,b)}f_{xy}(a+\theta_1(x-a),b+\theta_2(y-b))\\ &=\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{F(x,y)}{(x-a)(y-b)}\\ &=\lim_{(x,y)\to(a,b)}f_{yx}(a+\theta_3(x-a),b+\theta_4(y-b))\overset{(6.4)}{=}f_{yx}(a,b). \end{aligned}$$

すなわち, $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ $\big(\,(a,b)\in X\,\big)$ である. 以上により, 題意は示された. □

補足. 以後, 計算を簡単にするため, **議論の対象となる 2 変数関数 $f(x,y)$ は C^2 級であることを前提として考える**. こうすることで, 上述の定理 6.12 から, その 2 階偏微分 (2 階偏導関数) として

$$\boldsymbol{f_{xx}(x,y)},\quad \boldsymbol{f_{xy}(x,y)}\,(\text{あるいは, } f_{yx}(x,y)\text{ でもよい}),\quad \boldsymbol{f_{yy}(x,y)}$$

の実質的に 3 種類のものだけ考えればよいことになる.

2021 年度 経済数学入門 II (第 7 回) 講義ノート[*1]

7　2 変数関数の極値問題 (制約条件なしの場合)

定義 7.1 (2 変数関数の極大・極小値). 2 変数 (連続) 関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) と 点 $(a,b) \in X$ に対して, 次の主張が成り立つような実数 $\delta > 0$ が存在するときに, $f(x,y)$ は**点 (a,b) において極大値を取る**という (cf. 図 7.1):

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \ \Big((x,y) \in X \Big) \Longrightarrow f(x,y) < \underbrace{f(a,b)}_{\text{極大値}}. \tag{7.1}$$

同様に, 次の主張が成り立つような実数 $\delta > 0$ が存在するときに, $f(x,y)$ は**点 (a,b) において極小値を取る**という (cf. 図 7.2):

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \ \Big((x,y) \in X \Big) \Longrightarrow f(x,y) > \underbrace{f(a,b)}_{\text{極小値}}. \tag{7.2}$$

尚, 関数 $f(x,y)$ が取り得る極大値, 極小値のことをまとめて, $f(x,y)$ の**極値**という.

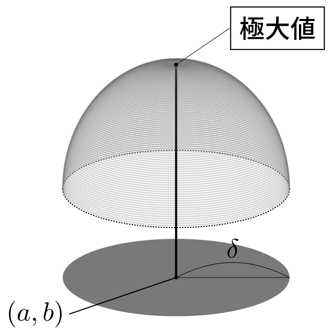


図 7.1　極大値 $f(a,b)$ のイメージ

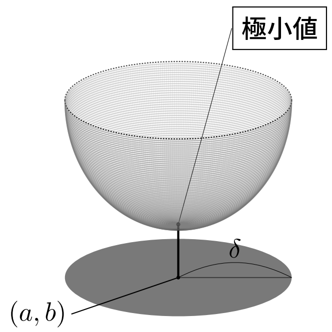


図 7.2　極小値 $f(a,b)$ のイメージ

定理 7.2 (極値を取るための必要条件). 2 変数 (C^1 級) 関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X$) に対して,

$$f(x,y) \text{ が点 } (a,b) \ (\in X) \text{ において極値を取る} \underset{(\not\Leftarrow)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0}.$$

証明. 定理 4.4 と同様にして示されるが, 図 7.1 & 7.2 をみれば, これは至極当然であるともいえる (cf. 定理 6.1).　□

定理 7.3 (2 変数関数の極値問題の解法例). 2 変数 (C^2 級) 関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X$) に対して, 次のような方法で極値を求めることができる:

$\boxed{1}$ **極値を与える点の候補の捜索：** $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 $(a,b) \in X$ をすべて求める (cf. 定理 7.2).

$\boxed{2}$ **極値であるか否かの判定：** 上述の $\boxed{1}$ で得られた各点 $(a,b) \in X$ に対して,

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b) \big(= f_{yx}(a,b)\big), \quad C = f_{yy}(a,b)$$

とおき, 更に, $D = AC - B^2$ とおく. このとき, もし $D \neq 0$ ならば, 以下のようなことがいえる[*2]:

(2-i)　$D > 0,\ A < 0 \Longrightarrow f(a,b)$ は極大値である.

(2-ii)　$D > 0,\ A > 0 \Longrightarrow f(a,b)$ は極小値である.

(2-iii)　$D < 0 \Longrightarrow f(a,b)$ は極値ではない.

証明. これもまた, 1 変数関数の極値判定法② (cf. 定理 4.9) の類似なのだが, 詳しい証明については省略する.　□

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.
[*2] 尚, $D = 0$ となる場合には, $f(a,b)$ が極値となることもならないこともあり, どちらであるのかを判定することは一般に容易ではない.

例題 7.4. 以下の 2 変数関数 $f(x,y)$ ($(x,y) \in X = \mathbb{R}^2$) に対して, その極値をすべて求めよ:

$$(1) \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad\qquad (2) \quad f(x,y) = x^2 - y^2$$

解答. 定理 7.3 の解法を用いて, 実際に求めてみよう: (1) はじめに, 手順 $\boxed{1}$ において, (1 階) 偏導関数は

$$f_x(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)_x = 2\,x + 0 = 2\,x, \quad f_y(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)_y = 0 + 2\,y = 2\,y.$$

であるので, 定理 7.2 から, $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$ においてのみ $f(x,y)$ は極値を取る可能性があるといえる. そこで, 次の手順 $\boxed{2}$ に進むと, 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = (\,2\,x\,)_x = 2, \quad f_{xy}(x,y) = (\,2\,x\,)_y = 0 \quad \bigl(f_{yx}(x,y) = (\,2\,y\,)_x = 0\bigr), \quad f_{yy}(x,y) = (\,2\,y\,)_y = 2$$

であるので, $A = f_{xx}(0,0) = 2$, $B = f_{xy}(0,0) = 0$, $C = f_{yy}(0,0) = 2$, $D = AC - B^2 = 2^2 - 0^2 = 4$. 従って, (2-ii) から, $D > 0$, $A > 0 \Longrightarrow f(0,0) = 0$ は実際に極小値であるといえる.

(2) 上述の (1) と同様に $\boxed{1}$ (1 階) 偏導関数が

$$f_x(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)_x = 2\,x, \quad f_y(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)_y = -2\,y$$

であることから, この場合も, $(x,y) = (0,0)$ においてのみ $f(x,y)$ は極値を取る可能性があるといえる (cf. 定理 7.2).

$\boxed{2}$ 2 階偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = (\,2\,x\,)_x = 2, \quad f_{xy}(x,y) = (\,2\,x\,)_y = 0 \quad \bigl(f_{yx}(x,y) = (\,-2\,y\,)_x = 0\bigr), \quad f_{yy}(x,y) = (\,-2\,y\,)_y = -2$$

であるので, $A = f_{xx}(0,0) = 2$, $B = f_{xy}(0,0) = 0$, $C = f_{yy}(0,0) = -2$, $D = AC - B^2 = 2 \times (-2) - 0^2 = -4$. 従って, (2-iii) から, $D < 0 \Longrightarrow f(0,0) = 0$ は極値でないといえるので, この場合, $f(x,y)$ の極値は存在しない. □

注意. 図 5.3 & 5.4 で示した 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 \pm y^2$ のグラフの形をみれば, 上述の例題 7.4 で得られたものと同じ結論が得られる (cf. 定義 7.1). しかし, ここで最も重要なことは, 定理 7.3 で述べた極値問題の解法では, 議論の対象とする 2 変数関数 $f(x,y)$ $\bigl((x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2\bigr)$ のグラフの形を調べる必要が全くないことである.

もう少し一般的な例を考えてみよう:

例題 7.5. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - 3\,x\,y + y^3$ ($(x,y) \in X = \mathbb{R}^2$) の極値をすべて求めよ.

解答. これも, 実際に定理 7.3 の解法を用いればよい: $\boxed{1}$ $f_x(x,y) = 3\,x^2 - 3\,y$, $f_y(x,y) = -3\,x + 3\,y^2$ であるので,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0, \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \;\;\,3\,x^2 - 3\,y = 0, \\ -3\,x + 3\,y^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \;\cdots ① \\ x - y^2 = 0 \;\cdots ② \end{cases}$$

を解いてみると, ② から $x = y^2$ であるといえるので, これを ① に代入すれば,

$$y^4 - y = 0 \Longleftrightarrow y\,(y^3 - 1) = y\,(y-1)(y^2 + y + 1) = 0 \Longleftrightarrow y = 0, 1 \;\left(\because\; y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\right).$$

従って, ① から, $y = 0$ ならば $x = y^2 = 0$, また, $y = 1$ ならば $x = y^2 = 1$ である. すなわち, $f(x,y)$ の極値を与える点の候補は $(a,b) = (0,0)$, $(1,1)$ の 2 つであるといえる (cf. 定理 7.2).

$\boxed{2}$ 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を再度偏微分して, $f(x,y)$ の 2 階偏導関数を求めてみると,

$$f_{xx}(x,y) = 6\,x, \quad f_{xy}(x,y)\,\bigl(= f_{yx}(x,y)\bigr) = -3, \quad f_{yy}(x,y) = 6\,y.$$

従って, $(a,b) = (0,0)$ の場合, $A = C = 0$, $B = -3$ より, $D = -9 < 0$ であるので, (2-iii) より, $f(0,0) = 0$ は極値でないといえる. 一方, $(a,b) = (1,1)$ の場合, $A = C = 6$, $B = -3$ より, $D = 27 > 0$, $A = 6 > 0$ であるので, (2-ii) より, $f(1,1) = -1$ は極小値であるといえる. □

練習問題 7. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + x\,y^2 - x$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) の極値をすべて求めよ.

解答. $\boxed{1}$ $f(x,y)$ の偏導関数は $f_x(x,y) = 3\,x^2 + y^2 - 1$, $f_y(x,y) = 2\,x\,y$ であるので,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0, \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\,x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ 2\,x\,y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\,x^2 + y^2 = 1 \ \cdots ① \\ x\,y = 0 \ \cdots ② \end{cases}$$

を解いてみると, ② から $x = 0$ または $y = 0$ であるといえるので,

$$\text{(i)}\quad x = 0 \overset{①}{\Longrightarrow} y^2 = 1 \Longleftrightarrow y = \pm 1. \qquad \text{(ii)}\quad y = 0 \overset{①}{\Longrightarrow} 3\,x^2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

従って, $f(x,y)$ の極値を与える点の候補は $(a,b) = (0,\pm 1)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ の 4 つであるといえる (cf. 定理 7.2).

$\boxed{2}$ 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を再度偏微分して, $f(x,y)$ の 2 階偏導関数を求めてみると,

$$f_{xx}(x,y) = 6\,x, \quad f_{xy}(x,y)\left(= f_{yx}(x,y)\right) = 2\,y, \quad f_{yy}(x,y) = 2\,x.$$

従って, $(a,b) = (0,\pm 1)$ の場合,

$$A = f_{xx}(0,\pm 1) = 0, \quad B = f_{xy}(0,\pm 1) = \pm 2, \quad C = f_{yy}(0,\pm 1) = 0.$$

すなわち, $D = A\,C - B^2 = 0^2 - (\pm 2)^2 = -4 < 0$ であるので, 定理 7.3 (2-iii) より, $f(0,\pm 1) = 0$ は極値ではない.

一方, $(a,b) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ の場合,

$$A = f_{xx}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \pm\frac{6}{\sqrt{3}}, \quad B = f_{xy}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = 0, \quad C = f_{yy}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

すなわち, $D = A\,C - B^2 = \left(\pm\frac{6}{\sqrt{3}}\right) \times \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - 0^2 = \frac{12}{3} = 4 > 0$ であるので, 定理 7.3 (2-i) & (2-ii) より,

$$A = +\frac{6}{\sqrt{3}} > 0 \overset{\text{(2-ii)}}{\Longrightarrow} f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ は極小値である.}$$

$$A = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0 \overset{\text{(2-i)}}{\Longrightarrow} f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = +\frac{2}{3\sqrt{3}} \text{ は極大値である.}$$

以上により, $f(x,y)$ の極値がすべて具体的に求められたといえる. □

補足 (一般的な多変数関数の極値). 定義 7.1 と同様に, n 変数 (C^1 級) 関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対しても, その極値 (すなわち, 極大値・極小値) と呼ばれる概念を導入することができる. また, この場合にも, 定理 7.2 と同様に, 以下のような主張が一般的に成立するといえる:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ が } (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{ において極値を取る}$$

$$\underset{(\not\Longleftarrow)}{\Longrightarrow} \boldsymbol{f_{x_1}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f_{x_2}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \cdots = f_{x_n}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0}.$$

従って, 与えられた n 変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して, その偏微分 $f_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の値が全て 0 となるような点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を求めることで, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の極値を与える点の候補が得られる. (尚, 定理 7.3 の $\boxed{2}$ で述べたような極値判定法の一般論も存在するが, ここでは省略する.)

2021 年度 経済数学入門 II (第 9 回) 講義ノート[*1]

9 2 変数関数の "制約条件付き" 極値問題に対する Lagrange の未定乗数法

第 7 節では, xy-座標平面上の領域 X において定義された 2 変数 (C^2 級) 関数 $f(x,y)$ に対して, 点 $(x,y) \in X$ を自由に動かして, その極値 (="局所的" 最大・最小値) を考えたが, 現実の問題では, **点 (x,y) ($\in X$) の動く範囲に更に何らかの制約条件を課して**極値問題を考えることが重要となる. これが **"制約条件付き" 極値問題**[*2]である.

定理 9.1 (制約条件付き極値問題の解法例; **Lagrange の未定乗数法**). 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ ($(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$) は C^2 級であるとする (cf. 定義 6.8). このとき, 方程式 $f(x,y) = 0$ を満たすという制約条件の下で考えた関数 $g(x,y)$ の極値が, 以下のようにして求められる:

$\boxed{1}$ **極値を与える点の候補の捜索：** $F(x,y,\lambda) := g(x,y) - \lambda\, f(x,y)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) とおいて[*3],

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0, \\ F_y(x,y,\lambda) = 0, \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \quad \left(\iff \begin{cases} g_x(x,y) - \lambda\, f_x(x,y) = 0, \\ g_y(x,y) - \lambda\, f_y(x,y) = 0, \\ -f(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_x(x,y) = \lambda\, f_x(x,y), \\ g_y(x,y) = \lambda\, f_y(x,y), \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \right) \tag{9.1}$$

となるような点 $(x,y) = (a,b)\,(\in X)$ と実数 $\lambda = \lambda_0\,(\in \mathbb{R})$ の組 (a,b,λ_0) をすべて求める.

$\boxed{2}$ **技術的な理由 (※) による候補の選別：** 上述の $\boxed{1}$ で求めた (a,b,λ_0) の中から $f_y(a,b) \neq 0$ であるものを選ぶ.

$\boxed{3}$ **極値であるか否かの判定：** 上述の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ を通して得られた組 (a,b,λ_0) に対して,

$$M := F_{xx}(a,b,\lambda_0)\, f_y(a,b)^2 - 2\, F_{xy}(a,b,\lambda_0)\, f_x(a,b)\, f_y(a,b) + F_{yy}(a,b,\lambda_0)\, f_x(a,b)^2 \tag{9.2}$$

とおくと, $M \neq 0$ ならば, $f(x,y) = 0$ という制約条件の下で $g(x,y)$ は点 (a,b) において極値を取る. 実際に

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & M < 0 \Longrightarrow \text{制約条件 } f(x,y) = 0 \text{ の下で } g(a,b) \text{ は極大値である.} \\ \text{(ii)} & M > 0 \Longrightarrow \text{制約条件 } f(x,y) = 0 \text{ の下で } g(a,b) \text{ は極小値である.} \end{array} \tag{9.3}$$

証明. 数学において一般に**陰関数定理** (implicit function theorem) と呼ばれる定理から, $\boxed{2}$ の条件により,

$$f_y(a,b) \neq 0 \Longrightarrow \textbf{条件式 } \boldsymbol{f(x,y) = 0} \textbf{ は点 } \boldsymbol{(a,b)} \textbf{ の近傍}^{*4}\textbf{において } \boldsymbol{y = \varphi(x)} \textbf{ と書き表すことができる (※)}$$

といえる. この事実を踏まえて, 関数 $g(x,y)$ の $f(x,y) = 0$ という制約条件付きでの極値問題を, "1 変数" 関数

$$G(x) := g(x, \varphi(x))$$

の極値問題へと帰着して解くというのが, Lagrange のアイディアである: 実際, もし $G(a) = g(a,b)$ (但し, $b = \varphi(a)$ とする) が極値であるならば, $G'(a) = 0$ が成り立つ (cf. 定理 4.4). 従って, 連鎖律 (5.2') から, $G'(x) = \{\, g(x,\varphi(x)) \,\}' = \{\, g(x,\varphi(x)) \,\}_x = g_x(x,\varphi(x)) + g_y(x,\varphi(x))\, \varphi'(x)$ であるので,

$$g_x(a,b) + g_y(a,b)\, \varphi'(a) = 0. \tag{†}$$

一方, (※) から, $x = a$ の近傍では $f(x,\varphi(x)) = 0$ (定数関数) であるので, この左辺の $x = a$ における微分の値は 0 である. 従って, 連鎖律 (5.2') から, $\{\, f(x,\varphi(x)) \,\}' = \{\, f(x,\varphi(x)) \,\}_x = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\, \varphi'(x)$ であるので,

$$f_x(a,b) + f_y(a,b)\, \varphi'(a) = 0. \tag{‡}$$

以上から, $\lambda_0 = \dfrac{g_y(a,b)}{f_y(a,b)}$ とおくと, $(x,y,\lambda) = (a,b,\lambda_0)$ として $\boxed{1}$ の条件 (9.1) が満たされることがわかる[*5]. また, $\boxed{3}$ の主張についても, $G''(a) = \dfrac{M}{f_y(a,b)^2}$ であるということに注意すれば, 定理 4.9 の主張から直ちに導かれる. □

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] 経済学では, **制約付き最適化問題**とも呼ばれる.

[*3] ここで新たに導入した変数 λ のことを, **Lagrange の (未定) 乗数**という.

[*4] すなわち, 点 (a,b) を中心とする X 上の (開) 円盤 $\{\, (x,y) \in X \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \,\}$ (但し, $\delta > 0$ とする) のこと.

[*5] 実際, λ_0 の定義から, $F_y(a,b,\lambda_0) = g_y(a,b) - \lambda_0\, f_y(a,b) = 0$. また, (‡) から, $\varphi'(a) = -f_x(a,b)/f_y(a,b)$ であるので, これを (†) に代入すれば, $F_x(a,b,\lambda_0) = g_x(a,b) - \lambda_0\, f_x(a,b) = 0$ が得られる. 更に, $F_\lambda(a,b,\lambda_0) = f(a,b) = 0$ である.

注意 9.2. $F(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda\, f(x,y)$ に対して, (1 変数関数の) 和・定数倍の微分法則から,

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = g_x(x,y) - \lambda\, f_x(x,y), \\ F_y(x,y,\lambda) = g_y(x,y) - \lambda\, f_y(x,y) \\ \bigl(F_\lambda(x,y,\lambda) = \qquad\qquad - f(x,y)\bigr) \end{cases} \xrightarrow{\text{偏微分}} \begin{cases} F_{xx}(x,y,\lambda) = g_{xx}(x,y) - \lambda\, f_{xx}(x,y), \\ F_{xy}(x,y,\lambda) = g_{xy}(x,y) - \lambda\, f_{xy}(x,y)^{*6}, \\ F_{yy}(x,y,\lambda) = g_{yy}(x,y) - \lambda\, f_{yy}(x,y). \end{cases}$$

従って, 定理 9.1 における (9.1) & (9.2) は, 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ の 2 階偏微分を具体的に求めてから, その結果を代入して考えればよい.

例題 9.3. "隣接する 2 辺の長さの和が一定である" という制約条件の下で長方形の面積の値が最大となるのは, 正方形の場合 (すなわち, 2 辺の長さが互いに等しい場合) であるということを, Lagrange の未定乗数法を用いて確かめよ.

解答. 長方形の隣り合う 2 辺の長さを x, y として, その和を $x + y = C$ (定数) とする. このとき,

$$f(x,y) = x + y - C, \quad g(x,y) = x\,y \quad (\text{但し, } x, y > 0 \text{ とする})$$

とおくと, 上述の問題は, 制約条件 $f(x,y) = 0$ の下において関数 $g(x,y)$ の極値を求める問題と解釈できる. そこで, $\boxed{1}$ $F(x,y,\lambda) := g(x,y) - \lambda\, f(x,y)$ とすれば,

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 1, \qquad g_x(x,y) = y, \qquad g_y(x,y) = x$$

であることから,

$$F_x(x,y,\lambda) = g_x(x,y) - \lambda\, f_x(x,y) = y - \lambda, \quad F_y(x,y,\lambda) = g_y(x,y) - \lambda\, f_y(x,y) = x - \lambda$$

であるので, (9.1) の連立方程式

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0, \\ F_y(x,y,\lambda) = 0, \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y - \lambda = 0, \\ x - \lambda = 0, \\ C - x - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \;=\; \lambda, \\ x \;=\; \lambda, \\ x + y \;=\; C \end{cases}$$

の解として $x = y = \lambda = \dfrac{C}{2}$, すなわち, $(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$ が得られる. (因みに, この場合は $f_y(x,y) = 1 \neq 0$ であるので, $\boxed{2}$ の手順は本質的に必要ない.) $\boxed{3}$ これが $f(x,y) = 0$ という制約条件の下での関数 $g(x,y)$ の極大値 (かつ, 最大値) を与えることを確かめる: 実際,

$$f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = 0, \qquad g_{xx}(x,y) = g_{yy}(x,y) = 0, \qquad g_{xy}(x,y)\,\bigl(= g_{yx}(x,y)\bigr) = 1.$$

すなわち,

$$F_{xx}(x,y,\lambda) = 0 - \lambda \times 0 = 0, \qquad F_{xy}(x,y,\lambda) = 1 - \lambda \times 0 = 1, \qquad F_{yy}(x,y,\lambda) = 0 - \lambda \times 0 = 0$$

であるので, $(x,y,\lambda) = \left(\dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}\right)$ に対して,

$$M \overset{(9.2)}{=} 0 \times 1^2 - 2 \times 1 \times 1^2 + 0 \times 1^2 = -2.$$

従って, $M < 0$ であることから, (9.3) の (i) より, 実際に $f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x + y = C$ という制約条件の下では $g\left(\dfrac{C}{2}, \dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{C^2}{4}$ が極大値であるといえる. □

練習問題 9. $x^2 + y^2 = 1$ という制約条件の下で, 2 変数 (C^2 級) 関数 $g(x,y) = x^2 - 4\,x\,y - 2\,y^2$ の極値を求めよ.

解答. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ とおいて, Lagrange の未定乗数法 (定理 9.1) を用いればよい:

[*6] 因みに, $f(x,y)$, $g(x,y)$ は C^2 級であるので, $F_{yx}(x,y,\lambda) = g_{yx}(x,y) - \lambda\, f_{yx}(x,y) = g_{xy}(x,y) - \lambda\, f_{xy}(x,y) = F_{xy}(x,y,\lambda)$ である (cf. 定理 6.12).

$F(x,y,\lambda) := g(x,y) - \lambda f(x,y)$ とおくと,

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y, \quad g_x(x,y) = 2x - 4y = 2(x-2y), \quad g_y(x,y) = -4x - 4y = -4(x+y)$$

であるので,

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) &= g_x(x,y) - \lambda f_x(x,y) = 2(x-2y) - 2\lambda x = 2\{(1-\lambda)x - 2y\}, \\ F_y(x,y,\lambda) &= g_y(x,y) - \lambda f_y(x,y) = -4(x+y) - 2\lambda y = -2\{2x + (2+\lambda)y\}, \\ F_\lambda(x,y,\lambda) &= \qquad\qquad\quad - f(x,y) = 1 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$ 極値を与える点の候補を求めるために, (9.1) の連立方程式

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0, \\ F_y(x,y,\lambda) = 0, \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0, \\ 2x + (2+\lambda)y = 0, \\ \quad 1 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 2y \ \cdots ① \\ (2+\lambda)y = -2x \cdots ② \\ x^2 + y^2 = 1 \ \cdots ③ \end{cases}$$

を満たすような実数の組 (x,y,λ) をすべて求める: $xy = 0$ (すなわち, $x = 0$ または $y = 0$) ならば, ①, ② により, $x = y = 0$ が得られるが, このとき明らかに ③ は成り立たない. 従って, $xy \neq 0$ と考えてよい. ここで, ① × ② より,

$$(1-\lambda)(2+\lambda)xy = -4xy \underset{(xy\neq 0)}{\Longrightarrow} (1-\lambda)(2+\lambda) = -4 \Longleftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda-2)(\lambda+3) = 0.$$

すなわち, $\lambda = 2,\ -3$ が得られる. (i) $\lambda = 2$ の場合, ① より, $x = -2y \cdots ①'$. また, これを ③ に代入すれば, $5y^2 = 1$. すなわち, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って, ①' により, $(x,y,\lambda) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 2\right)$ (複号同順). (ii) $\lambda = -3$ の場合, ② より, $y = 2x \cdots ②'$. また, これを ③ に代入すれば, $5x^2 = 1$. すなわち, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ が得られる. 従って, ②' より, $(x,y,\lambda) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -3\right)$ (複号同順). 以上, (i), (ii) より,

$$(x,y,\lambda) = \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \mp\frac{1}{\sqrt{5}}, 2\right), \ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, -3\right) \text{ (複号同順)}.$$

$\boxed{2}$ 上述の $\boxed{1}$ で得られた (x,y,λ) に対しては, $y \neq 0$ であるといえるので, $f_y(x,y) = 2y \neq 0$ である.

$\boxed{3}$ 実際に極値であるか否かを判定する:

$$\begin{aligned} F_{xx}(x,y,\lambda) &= g_{xx}(x,y) - \lambda f_{xx}(x,y) = 2 - 2\lambda = 2(1-\lambda), \\ F_{xy}(x,y,\lambda) &= g_{xy}(x,y) - \lambda f_{xy}(x,y) = -4, \\ F_{yy}(x,y,\lambda) &= g_{yy}(x,y) - \lambda f_{yy}(x,y) = -4 - 2\lambda = -2(2+\lambda) \end{aligned}$$

であるので, (9.2) のように

$$\begin{aligned} M &:= F_{xx}(x,y,\lambda) f_y(x,y)^2 - 2F_{xy}(x,y,\lambda) f_x(x,y) f_y(x,y) + F_{yy}(x,y,\lambda) f_x(x,y)^2 \\ &= 8(1-\lambda)y^2 + 32xy - 8(2+\lambda)x^2 = 8\left\{(1-\lambda)y^2 + 4xy - (2+\lambda)x^2\right\} \end{aligned}$$

とおく. (i) $(x,y,\lambda) = \left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 2\right)$ (複号同順) の場合,

$$M = 8 \times \left\{-\frac{1}{5} - \frac{8}{5} - \frac{16}{5}\right\} = -40 < 0.$$

すなわち, $g\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{4}{5} + \dfrac{8}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$ は, 条件 $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ の下での極大値である.

(ii) $(x,y,\lambda) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -3\right)$ (複号同順) の場合,

$$M = 8 \times \left\{\frac{16}{5} + \frac{8}{5} + \frac{1}{5}\right\} = 40 > 0$$

より, $g\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5} - \dfrac{8}{5} = -\dfrac{15}{5} = -3$ は, 条件 $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ の下での極小値である. □

補足. 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, xy-座標平面上で方程式 $f(x,y)=0$ を満たすような点 (x,y) 全体の軌跡は, 一般に曲線となる. 尚, この曲線の方程式が

$$f(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=\varphi(x)$$

と書き表されるときには, このような (1 変数) 関数 $\varphi(x)$ を, 曲線 $f(x,y)=0$ の**陰関数** (implicit function) という. 例えば, $f(x,y)=x^2+y^2-1$ に対して, 方程式 $f(x,y)=0$ は原点 $(0,0)$ を中心とする半径 1 の (単位) 円を定める. この円は, 円周上の点 $(a,b)\neq(\pm1,0)$ の近傍においては $y=\sqrt{1-x^2}$, あるいは, $y=-\sqrt{1-x^2}$ と書き表すことができるので, $f(x,y)=0$ は $\varphi_+(x)=\sqrt{1-x^2}$, あるいは, $\varphi_-(x)=-\sqrt{1-x^2}$ を陰関数として持つ. しかし, 円周上の点 $(a,b)=(\pm1,0)$ の近傍においては $f(x,y)=0$ を $y=\varphi(x)$ という形で書き表すことができないので, 陰関数は存在しない.

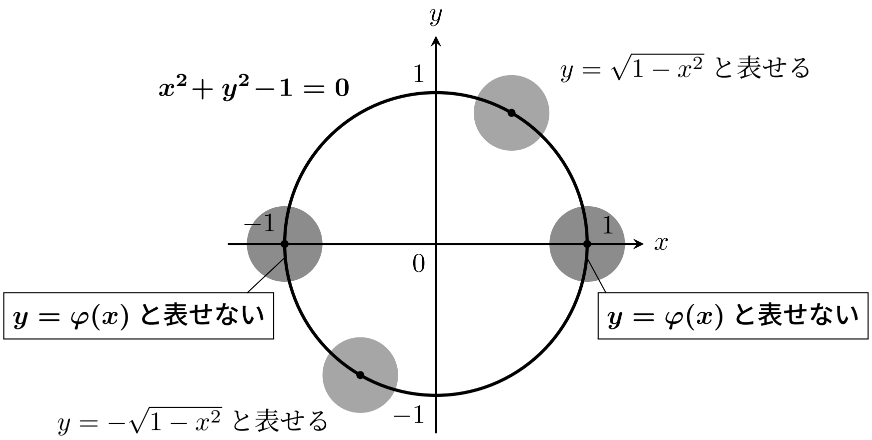


図 9.1　$f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ の陰関数

このように, 曲線 $f(x,y)=0$ の陰関数は, その上の点ごとに決まるものであって, 点が変われば陰関数の形が変わることもある. また, 陰関数が存在しないような点 (**特異点**) もある. Lagrange の未定乗数法 (定理 9.1) の $\boxed{2}$ で述べた条件 "$f_y(a,b)\neq 0$" は, **曲線 $f(x,y)=0$ が点 (a,b) の近傍において, 実際に陰関数を持つための充分条件**である[*7].

定理 9.4 (Lagrange の未定乗数法 [一般形]). n 変数 (C^2 級) 関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ に対して, 制約条件 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ の下で, 関数 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ が $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ において極値を取るならば,

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda):=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda\, f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad (\text{但し, }\lambda\text{ は実数とする}) \tag{$\heartsuit$}$$

とおくと, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ に対して, 連立方程式

$$\left\{\begin{array}{rcl} F_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) &=& 0,\\ F_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) &=& 0,\\ &\vdots& \\ F_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) &=& 0,\\ F_{\lambda}(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda) &=& 0 \end{array}\right. \quad \left(\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} g_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &=& \lambda\, f_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ g_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &=& \lambda\, f_{x_2}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ &\vdots& \\ g_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) &=& \lambda\, f_{x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &=& 0 \end{array}\right.\right) \tag{9.4}$$

が成り立つような実数 $\lambda=\lambda_0$ が存在する.

注意 9.5. 上述の定理 9.4 の主張は, $n=2$ の場合に定理 9.1 $\boxed{1}$ で述べた原理の一般化である. 尚, 定理 9.1 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の原理の一般化に相当する主張も知られているが, 本講義では詳しく取り扱わないことにする[*8].

[*7] ここで, 曲線 $f(x,y)=0$ の点 (a,b) における接線の方程式は $f_x(a,b)\,(x-a)+f_y(a,b)\,(y-b)=0$ であることに注意する.

[*8] これらの詳細について興味があれば, **陰関数定理** (implicit function theorem) や**境界付き Hesse 行列** (bordered Hessian matrix) と呼ばれるもの (の一般論) について調べてみるとよい.

2021 年度 経済数学入門 II (第 10 回) 講義ノート[*1]

10 Lagrange の未定乗数法の経済学的解釈

任意に与えられた二つの n 変数 (C^2 級) 関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して,

$$\text{“変数 } x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ は, 方程式 } f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \text{ を満たすようなものとする”}$$

という制約条件の下で関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の極値 (すなわち, 極大値・極小値) を求めるためには, 新たにもう一つ未知の変数 λ (**Lagrange の未定乗数**) を導入して,

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) := g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{$\heartsuit$}$$

とおき, その偏微分を計算することで得られる連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) & = & 0, \\ F_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) & = & 0, \\ & \vdots & \\ F_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) & = & 0, \\ F_{\lambda}(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) & = & 0 \end{array} \right. \left(\iff \left\{ \begin{array}{rcl} g_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda\, f_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0, \\ g_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda\, f_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0, \\ & \vdots & \\ g_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda\, f_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0, \\ -f(x_1, x_2, \cdots, x_n) & = & 0 \end{array} \right. \right) \tag{$\diamondsuit$}$$

の解を求めることから始めればよいというのが, **Lagrange の未定乗数法**の基本理念である (cf. 定理 9.1 $\boxed{1}$ & 9.4). 実際, このような (Lagrange の) 解法の考え方は, 経済学的な観点からみても, 非常に自然なものであるといえる.

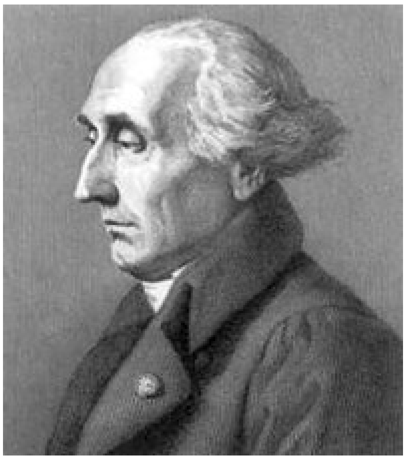


図 10.1 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813 年)

例えば, 市場に流通する n 種類の商品 (**財**) に対して, ある特定の消費者が, それぞれの商品を消費量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ だけ消費することで得られる満足度 (**効用**) が, ある (C^2 級) 関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値で表せたとする[*2]. ここで, 消費者は “ある一定の予算 (**所得**) の範囲で各商品を消費する” と考えたとき, 各商品の価格を p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とすれば, この “制約条件” は

$$p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n = B \quad \text{(ここでの定数 } B \text{ は予算の金額を表すものである)}$$

のような形で表すことができる. このような条件の下で消費者が得られる満足度を最大化するような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の組み合わせを知ることは, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) := p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n - B$ とおいて, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ という制約条件の下で関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の極大値を求める問題 (**制約条件付き極値問題**) を考えるのと同義である.

[*1] 担当・執筆： 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] 経済学において, このような関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のことを**効用関数**という.

しかし, 直感的に考えてみれば, この問題は, ただ単に (無条件に各商品を消費して) 満足度 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値が最大となるような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求めるのではなく, 実際に各商品を消費した際に発生する予算の減額も考慮して,

$$\text{①}\ \underbrace{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}_{\text{満足度}} \text{ と } \text{②}\ \underbrace{B}_{\text{予算}} - \underbrace{(p_1 x_1 + p_2 x_2 \cdots + p_n x_n)}_{\text{支出}} = -f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ の両方の値が最大となる}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda \times \{ -f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \} &= g(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \lambda f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\overset{(\heartsuit)}{=} F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) \end{aligned}$$

が最大値 (極大値) となるような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求める問題であるとも解釈できる*3. 尚, ここで用いた乗数 λ は, **単位が互いに異なる二つの関数 $\boldsymbol{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$, $\boldsymbol{g(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ の間を繋ぐ役割を担っているもの**と理解することができる:

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdots$ 予算と支出の差額 (単位: 通貨単位)　　$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdots$ 消費者の満足度 (単位: ??)

更に, 連立方程式 ($\diamondsuit$) は, 関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda)$ が極大値を取るための必要条件に他ならない (cf. 定理 4.4 & 7.2). こうしてみれば, 制約条件付き極値問題に対する Lagrange の未定乗数法の考え方は, 経済学的 (あるいは, 直感的) にも非常に自然なものだといえないだろうか？

注意. この講義では, $n = 2$ (すなわち, 2 変数関数) の場合にのみ, (最終的な極値判定法も含めた) Lagrange の未定乗数法の一般論について詳しく解説したが, 実際にミクロ経済学で中心的に用いられる Lagrange の未定乗数法は, $n \geq 3$ の場合がほとんどである.

練習問題 10. 以下の 2 変数 (C^2 級) 関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ に対して, 制約条件 $f(x, y) = 0$ の下での $g(x, y)$ の極値を Lagrange の未定乗数法 (定理 9.1) を用いて求めよ.

(1) $f(x, y) = x\,y - 4,\ \ g(x, y) = x^2 + y^2$

(2) $f(x, y) = x^2 + 2\,y^2 - 3,\ \ g(x, y) = 2\,x + y$

(3) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1,\ \ g(x, y) = x^2 + y^2 - 4\,x - 2\,y + 1$

(4) $f(x, y) = x^2 + y^4 - 16,\ \ g(x, y) = 4\,y$

解答. $F(x, y, \lambda) \overset{(\heartsuit)}{=} g(x, y) - \lambda\, f(x, y)$ とおいて, 連立方程式

$$F_x(x, y, \lambda) = F_y(x, y, \lambda) = F_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

の解 $(x, y, \lambda) = (a, b, \lambda_0)$ をすべて求めた後, (更に必要ならば $f_y(a, b) \neq 0$ であることを確かめた上で) 実際に

$$M = F_{xx}(a, b, \lambda_0)\, f_y(a, b)^2 - 2\, F_{xy}(a, b, \lambda_0)\, f_x(a, b)\, f_y(a, b) + F_{yy}(a, b, \lambda_0)\, f_x(a, b)^2$$

の値の正負を調べればよい：

(1) $g(\pm 2, \pm 2) = 8$ が極小値となる.

(2) $g\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{9}{\sqrt{6}}$ が極大値, $g\left(-\dfrac{4}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\dfrac{9}{\sqrt{6}}$ が極小値となる.

(3) $g\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2 + 2\sqrt{5}$ が極大値, $g\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = 2 - 2\sqrt{5}$ が極小値となる.

(4) $g(0, 2) = 8$ が極大値, $g(0, -2) = -8$ が極小値となる.

(詳細については, 各自で実際に計算して確かめよ.) □

*3 実際, 限られた予算の中では, “できるだけ少ない支出で” より大きな満足度が得られるように消費活動を行うことが重要であるといえる.

2021 年度 経済数学入門 II (第 11 回) 講義ノート[*1]

11 数列の極限

定義 11.1 (数列の極限)**.** (実) 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ に対して,

$$\text{自然数 } n \text{ を限りなく大きくする } (n \to \infty) \text{ と } a_n \text{ はある一定の値 } \alpha \text{ に限りなく近付く} \tag{11.1}$$

といえるような実数 α $(\in \mathbb{R})$ が存在するとき, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) は α に等しいといい, これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{あるいは,} \quad a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書き表す．このように極限が有限の値となる場合, その数列の極限は**収束する** (converge) という．一方, 数列の極限が収束しないことを**発散する** (diverge) という．例えば,

$$\text{自然数 } n \text{ を限りなく大きくすると } a_n \text{ は限りなく大きく (resp. 小さく) なる} \tag{11.2}$$

といえるとき, 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の極限は $\boldsymbol{\infty}$ (resp. $\boldsymbol{-\infty}$) **に発散する**といい, これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ \left(\text{resp. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

と書き表す.

補足. 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して, 上述の主張 (11.1) は

$$\text{自然数 } n \text{ を限りなく大きくすれば, 絶対値 } |a_n - \alpha| \ (\geq 0) \text{ は限りなく } 0 \text{ に近付く} \tag{11.1'}$$

と言い換えてもよい．すなわち,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \ (\in \mathbb{R}) \iff \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0.$$

例 11.2.

(1) 収束する数列の極限の典型例：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

(2) 発散する数列の極限の典型例：

$$\lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

補題 11.3 (**収束する数列の極限の基本的性質**)**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ とする．このとき,

(1) **四則演算の極限：**

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$. すなわち, $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\,\alpha$. すなわち, $\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ (但し, $c \in \mathbb{R}$ は任意の定数とする).

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \alpha\,\beta$. すなわち, $\lim_{n\to\infty} (a_n\, b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \times \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}$. すなわち, $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (但し, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ とする).

(2) **極限の (広義) 単調性：** $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \alpha \leq \beta$. すなわち, $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$[*2].

証明. これらの主張が成り立つことは, 定義 11.1 で述べた数列の極限の意味を, もう少し (数学的に) 厳密な形で定義すれば, すべて実際に証明することができる (**※この講義では, これらのことは事実として認めても構わない**). □

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] ここで, 特に $a_n < b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であったとしても, 一般には $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ であることに注意する.

定理 11.4 (はさみうちの原理). 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$c_n \le a_n \le b_n \ (n=1,2,\cdots), \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha \ (\in \mathbb{R}) \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha. \tag{11.3}$$

特に, 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|a_n - \alpha| \le b_n \ (n=1,2,\cdots), \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha. \tag{11.3'}$$

証明. 実際, $c_n \le a_n \le b_n \ (n=1,2,\cdots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば, 補題 11.3 (2) から,

$$\alpha \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \alpha.$$

従って, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるので, 主張 (11.3) が成り立つといえる. 尚, 主張 (11.3') は, 主張 (11.3) から直ちに従う:

$$0 \le |a_n - \alpha| \le b_n \ (n=1,2,\cdots), \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \overset{(11.3)}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} |a_n - \alpha| = 0 \overset{(11.1')}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

以上により, 題意は示されたといえる. □

例題 11.5. 次の数列の極限の値を求めよ:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2+1} \qquad (3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

解答. (1) 任意の自然数 $n \ge 1$ に対して,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

すなわち, $0 < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n=1,2,\cdots)$ が成り立つことに注意すれば, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (cf. 例 11.2) であるので, はさみうちの原理 (11.3') により, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ (**収束**).

(2) 任意の自然数 $n \ge 1$ に対して,

$$\frac{2n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

であることから, 補題 11.3 (1) により, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{n^2+1} = \dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2-\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{2-0}{1+0} = 2$ (**収束**).

(3) 任意の自然数 $n \ge 1$ に対して, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ であることに注意すれば,

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1+\dfrac{1}{n}}{2}$$

であるので, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\times(1+0) = \dfrac{1}{2}$ (**収束**). □

注意. 例題 11.5 の解答からもわかるように, 数列の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求める際には, 補題 11.3 や定理 11.4 を踏まえて,

極限操作 ($n \to \infty$) を施す "前" に, 数列の一般項 a_n を然るべき形に変形して考える

ことが最も重要である. (そうしないと, 結論が "$\infty - \infty$" や "$\dfrac{\infty}{\infty}$" のような形 (**不定形**) になってしまう.)

例 11.6 (等比数列の極限). $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を初項 $a\,(\neq 0)$, 公比 r の等比数列とする:

$$a_1 = a, \qquad a_n = a_{n-1} \times r \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

すなわち, $a_n = a\,r^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるので, **その極限は $\boldsymbol{-1 < r \leq 1}$ の場合にのみ** (有限の値に) **収束する**といえる:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (a\,r^{n-1}) = \begin{cases} +\infty & (r > 1, a > 0) \\ -\infty & (r > 1, a < 0) \\ \boldsymbol{a} & (\boldsymbol{r = 1}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{-1 < r < 1}) \\ \text{発散}^{*3} & (r \leq -1). \end{cases}$$

実際, $r = 1$ の場合は $a_n = a$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるので, 明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ である. また, $-1 < r < 1$ の場合は, $|r|^{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ であるので,

$$|a_n| = \left|a\,r^{n-1}\right| = |a| \times |r|^{n-1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

すなわち, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \overset{(11.1')}{\iff} \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるといえる.

例 11.7 (漸化式によって定められる数列の極限). (有理) 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を, 以下のような漸化式を満たすものとして定義する:

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \ (n = 2, 3, \cdots).$$

この数列の極限は $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}}$ である: 実際, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ (\in \mathbb{R})$ とすると, 相加・相乗平均の関係から, 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して,

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a_{n-1} \times \frac{2}{a_{n-1}}} = \sqrt{2}$$

となる. 従って, 補題 11.3 (2) から, $\alpha \geq \sqrt{2}$ であるといえる. 一方, 上述の漸化式の両辺の極限を取ることで,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} a_{n-1}}\right) \iff \alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)$$

(cf. 補題 11.3 (1)). 更に, この両辺に $2\,\alpha$ を掛けることで,

$$2\,\alpha^2 = \alpha^2 + 2 \iff \alpha^2 = 2 \iff \alpha = \pm\sqrt{2}$$

であることがわかる. 従って, $\alpha \geq \sqrt{2}\ (> 0)$ より, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ である.

注意. 例 11.7 の数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ の第 2 項目以降に現れる有理数の値を, 上述の漸化式をもとに計算してみると, 以下の通り, 項を先に進める毎に徐々に極限値 $\sqrt{2}$ へと近付いていることが実際に確認できる:

$$a_2 = \frac{3}{2} = \mathbf{1}.5, \qquad a_3 = \frac{17}{12} = \mathbf{1.41}\dot{6}, \qquad a_4 = \frac{577}{408} = \mathbf{1.414121}5\cdots,$$

$$a_5 = \frac{665857}{470832} = \mathbf{1.41421356237}4\cdots, \quad \longrightarrow \quad \sqrt{2} = 1.4142135623730950488\cdots.$$

練習問題 11.1. 次の数列の極限の値を求めよ:

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$ (3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ (4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

---

*3 実際, $r = -1$ の場合, a_n は a, $-a$ の間で (単幅) 振動するので, その極限は一定の値に収束するとはいえない. また, $r < -1$ の場合も a_n は (増幅) 振動するので, その極限の値は一定に定まらないことから, 発散するといえる.

解答. (1) 例題 11.5 (1) と同様, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2} = \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\end{aligned}$$

であることから, 補題 11.3 (1) (および, 関数 $\sqrt{1+x}$ ($x \in [-1,\infty)$) の連続性) により,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = \sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1 = \sqrt{1+0}+1 = 1+1 = \mathbf{2}.$$

(2) 例題 11.5 (3) と同様, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$ であることに注意すれば,

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6\,n^3} = \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\,n^3} = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

であるので, 補題 11.3 (1) により,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

(3) はさみうちの原理 (cf. 定理 11.4) を用いればよい: 実際, $0 \leq |\sin x| \leq 1$ であることから, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して,

$$0 \leq \left|\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

従って, はさみうちの原理 (11.3') により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| = 0$. すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \mathbf{0}$ である.

(4) 補題 11.3 (1) により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. ここで,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \quad (\text{cf. 例 } 11.6)$$

であるので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0+0 = \mathbf{0}$. □

練習問題 11.2. 以下の数列の極限に対して収束・発散を調べよ (また, 収束する場合は, その極限の値を求めよ) :

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2\,n^2-1}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^n}{3^n-2^n}$ (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}$ (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ (6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$ (7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{r^n}$ (但し, $r>1$ とする)

解答. 以下の通りである (詳細は各自で確かめよ) :

(1) 0 (**収束**) (2) 3 (**収束**) (3) ∞ (**発散**) (4) 0 (**収束**) $\left(\because\ 0 < \dfrac{n!}{n^n} \leq \dfrac{1}{n} \to 0 \ \ (n\to\infty).\right)$

(5) $\dfrac{1}{2}$ (**収束**) (6) 0 (**収束**) $\left(\because\ 0 \leq \dfrac{1+(-1)^n}{n} \leq \dfrac{2}{n} \to 0 \ \ (n\to\infty).\right)$ (7) ∞ (**発散**) □

2021 年度 経済数学入門 II (第 12 回) 講義ノート[*1]

12　級数

12.1　有限級数 (有限和)

定義 12.1 (有限和)**.** n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(\in \mathbb{R})$ に対して, その和を

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と書き表す.

例 12.2 (自然数の有限和)**.** 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して,

(1) n 以下の自然数の総和：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$

(2) n^2 以下の平方 (2 乗) 数の総和：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}.$

(3) n^3 以下の立方 (3 乗) 数の総和：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2.$

補足 (4 乗数・5 乗数の有限和)**.** 別に覚える必要はないが, 次のような等式が成り立つことも知られている[*2]:

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 + n^4 = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)\,(3\,n^2+3\,n-1)}{30}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + (n-1)^5 + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2\,n^2+2\,n-1)}{12}.$$

例 12.3 (等差級数)**.** $(\,a_n\,)_{n=1}^{\infty}$ を初項 a, 公差 b の等差数列とする:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1 + b = a + b, \quad a_3 = a_2 + b = a + 2\,b, \quad a_4 = a_3 + b = a + 3\,b, \quad \cdots\cdots.$$

すなわち, $a_n = a + (n-1)\,b \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ である. 従って, その第 1 項目から第 n 項目までの和は, 例 12.2 (1) より,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\{a + (i-1)\,b\} = n\,a + b\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n\,a + b\sum_{j=0}^{n-1} j = n\,a + b\sum_{j=1}^{n-1} j = n\,a + b \times \frac{(n-1)\,n}{2}.$$

例 12.4 (**等比級数**)**.** 初項 $a\,(\neq 0)$, 公比 $r \neq 1$ の等比数列 (cf. 例 11.6) の第 1 項目から第 n 項目までの和は

$$a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a\,r^{i-1} = a\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \tag{12.1}$$

である: 実際, $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$ とおくと,

$$(1-r)\,S_n = S_n - r\,S_n = (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) - (r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n) = 1 - r^n.$$

従って, $r \neq 1$ ならば, $S_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ が得られる[*3].

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] 尚, 任意の自然数 $n, k \geq 1$ に対して, n^k 以下の k 乗数の和の一般公式が Jakob Bernoulli (1654–1705) と関孝和 (1642–1708) によって示されている. 詳しくは, **Bernoulli 数**, **Bernoulli 多項式**と呼ばれるものについて調べてみるとよい.

[*3] 因みに, $r = 1$ の場合は, $S_n = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{n-1} = \overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{n} = n$. 従って, この場合に (12.1) は成立しない.

12.2　無限級数 (無限和)

定義 12.5. (実) 数列 $(\, a_n\,)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ に対して,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_N \quad (N = 1, 2, \cdots) \tag{12.2}$$

として定義される数列 $(\, S_N\,)_{N=1}^{\infty}$ の極限が収束するとき, すなわち, $\lim_{N\to\infty} S_N = S$ となるような実数 S $(\in \mathbb{R})$ が存在するとき,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots\cdots$$

と書き表し, これを数列 $(\, a_n\,)_{n=1}^{\infty}$ の**級数** (series), あるいは, **無限級数** (infinite series) という[*4]. すなわち,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots + a_N)\,.$$

尚, (12.2) の数列 $(\, S_N\,)_{N=1}^{\infty}$ の極限が発散する (すなわち, 一定の値に収束しない) とき, 数列 $(\, a_n\,)_{n=1}^{\infty}$ の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**という. 例えば, $\lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$ のとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **$\pm\infty$ に発散する**といい, これを

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \right) = \pm\infty$$

と書き表す.

例 12.6 ("無限" 等比級数). 初項 $a\,(\neq 0)$, 公比 r の等比数列 $a_n = a\, r^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ から定まる (無限) 級数は **$-1 < r < 1$ の場合にのみ収束する**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} + \cdots\cdots = \begin{cases} \infty & (r \geq 1,\ a > 0) \\ -\infty & (r \geq 1,\ a < 0) \\ \boldsymbol{\dfrac{a}{1-r}} & (\boldsymbol{-1 < r < 1}) \\ \text{発散} & (r \leq -1). \end{cases} \tag{12.3}$$

実際, $r \neq 1$ ならば, 任意の自然数 $N \geq 1$ に対して,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (a\,r^{n-1}) \overset{(12.1)}{=} a \times \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

であるので, $-1 < r < 1$ の場合は,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(a \times \frac{1 - r^N}{1 - r} \right) = a \times \lim_{N\to\infty} \frac{1 - r^N}{1 - r} = a \times \frac{1 - \lim_{N\to\infty} r^N}{1 - r} = a \times \frac{1 - 0}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

となり, それ以外の場合は発散するといえる (cf. 例 11.6). 一方, $r = 1$ ならば, $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a\,N$ であるので, その極限 $\lim_{N\to\infty} S_N$ は明らかに発散する:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} a\,N = \begin{cases} \infty & (a > 0), \\ -\infty & (a < 0). \end{cases}$$

[*4] これは, 項が (可算) 無限個ある数列 $(\, a_n\,)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ の**和** (cf. 定義 12.1) に相当する概念であるので, 数列 $(\, a_n\,)_{n=1}^{\infty}$ の**無限和** (infinite sum) と呼ばれることもある.

2021 年度 経済数学入門 II (第 13 回) 講義ノート[*1]

13　1 変数関数の積分法

13.1　積分の基本概念 (定積分)

以下では, 議論の対象として考える関数 (**被積分関数**) は, 一般に (有界な) **閉区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 上において定義された連続関数**であると仮定する.

定義 13.1 (定積分)**.** 実数 a, b ($\in \mathbb{R}$) は $a < b$ とする. このとき, (連続) 関数 $f(x)$ ($x \in [a, b]$) に対して, xy-座標平面における曲線 $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) と直線 $y = 0$ (i.e., x-座標軸), $x = a$, $x = b$ によって囲まれた領域の "面積" を

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

と書き表し, これを**積分区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ の定積分** (あるいは, 単に**積分**) という (cf. 図 13.1). 但し,

x-座標軸よりも上にある領域の "面積" は正の値, x-座標軸よりも下にある領域の "面積" は負の値である

と考えるものとする (cf. 図 13.1 & 13.2)[*2].

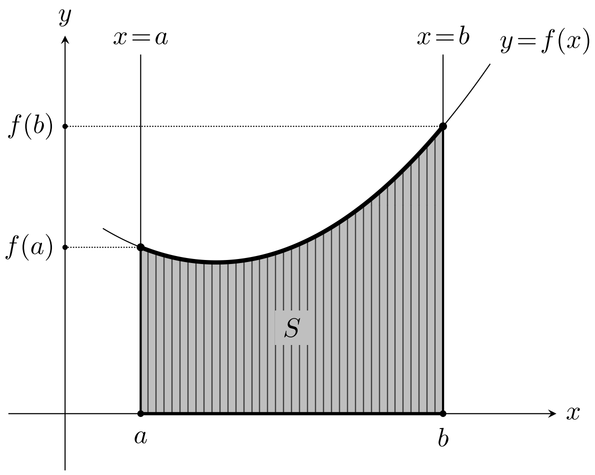


図 13.1　$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = S\ \bigl(= |\,S\,|\bigr) \geq 0$

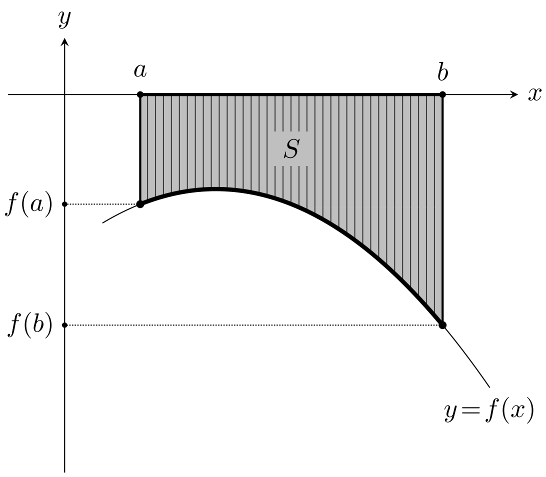


図 13.2　$\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = S = -|\,\boldsymbol{S}\,| \leq 0$

尚, ここで述べた $a < b$ の場合の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の概念 (と後述の補題 13.4 (1)) をもとにして, $a \geq b$ の場合にも

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0 \quad (a = b \text{ の場合}), \qquad \int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx \quad (a > b \text{ の場合})$$

と便宜的に定める. こうすることにより, 一般に与えられた二つの実数 a, b ($\in \mathbb{R}$) に対して, a と b の大小関係に関係なく, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ を考えることができる.

例 13.2. (1) 定数関数 $f(x) = C$ ($x \in [a, b]$) に対して, 長方形の面積公式から,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b C\ dx = C \times (b - a).$$

(2) 1 次関数 $f(x) = x$ ($x \in [a, b]$) に対して, $a\,b \leq 0$ の場合は直角三角形の面積公式, また, $a\,b > 0$ の場合は台形の面積公式から,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b x\ dx = \frac{1}{2}\,(b + a)(b - a) = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2).$$

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] これは, 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ において取り得る全ての値を **"その値の正負も考慮して"** 積算したものと考えても良い.

注意 13.3. 上述の例 13.2 のように被積分関数 $f(x)$ のグラフが直線であるような場合は, 定積分 $\int_a^b f(x)\ dx$ の値が "長方形の面積 = 縦 × 横" という事実をもとにして簡単に求められる. しかし, 例えば, 2 次関数 $f(x) = x^2$ $(x \in [a, b])$ のように被積分関数 $f(x)$ のグラフが曲線である場合には,

定積分 $\int_a^b f(x)\ dx$ の値に相当する平面領域の面積とは, そもそも何なのか？

という疑問が生じる. 実は, 本来の (数学的に厳密な) 積分の議論は **"区分求積法"** と呼ばれる考え方を用いて, 定積分 $\int_a^b f(x)\ dx$ を, 以下のように **"長方形の面積の有限和の極限"** として定義した上で展開される:

定義 13.1' (= 定義 13.1 の厳密化)**.** 積分区間 $[a, b]$ の上で

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となるように点列 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ $(n \geq 1)$ を取ると, $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$ と分割できる. ここで, 更に, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の上で

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i]\ (\text{すなわち}, x_{i-1} \leq c_i \leq x_i)$$

を (任意に) 固定して, $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$ とおく. この S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を, $[a, b]$ の分割を限りなく細かくすることで得られる極限を

$$S_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} S = \int_a^b f(x)\ dx\ (\text{cf. 定義 } 13.1)$$

と書き表し, これを図 13.1 の領域の "面積" と定義する.

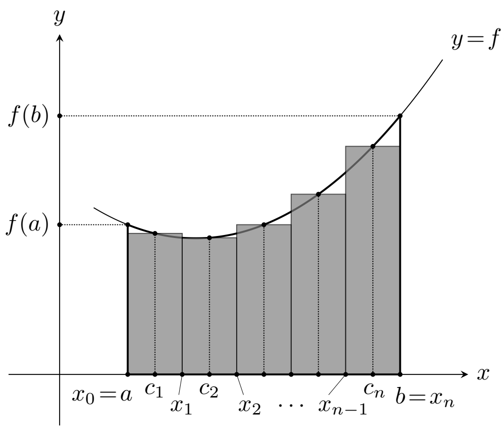


図 13.3　$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$

本講義では, こういった議論については詳しく取り扱わないが, もし興味があれば, **Riemann 積分論**と呼ばれるものについて各自で調べてみるとよい.

補題 13.4 (定積分の基本的性質)**.** (連続) 関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ に対して, 一般に以下のような主張が成立する:

(1) **積分区間に関する加法性 :** $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \quad (c \in [a, b]).$

(2) **積分の平均値定理**[*3] **:** $\int_a^b f(x)\ dx = f(c) \times (b - a)$ となるような実数 $c \in [a, b]$ が存在する.

証明. 上述の定義 13.1' のような形で積分を厳密に定義すれば, 実際に証明することもできるが, ここでは省略する (※**この講義では, これらのことは事実として認めても構わない**). □

練習問題 13.1. 定義 13.1 を踏まえて, 定積分 $\int_1^2 (2\,x + 1)\ dx$ の値を求めよ.

解答. 被積分関数 $f(x) = 2\,x + 1$ $(x \in [1, 2])$ のグラフを xy-座標平面に図示してみれば, 台形の面積公式により,

$$\int_1^2 (2\,x + 1)\ dx = \frac{1}{2} \times (5 + 3) \times (2 - 1) = \frac{8}{2} = 4.$$ □

[*3] これは, 経済数学入門 I において紹介した (Lagrange の) 平均値定理の積分版と呼ぶべきものである. 尚, この主張が成立するためには, 被積分関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ が連続性を持つことが必須である.

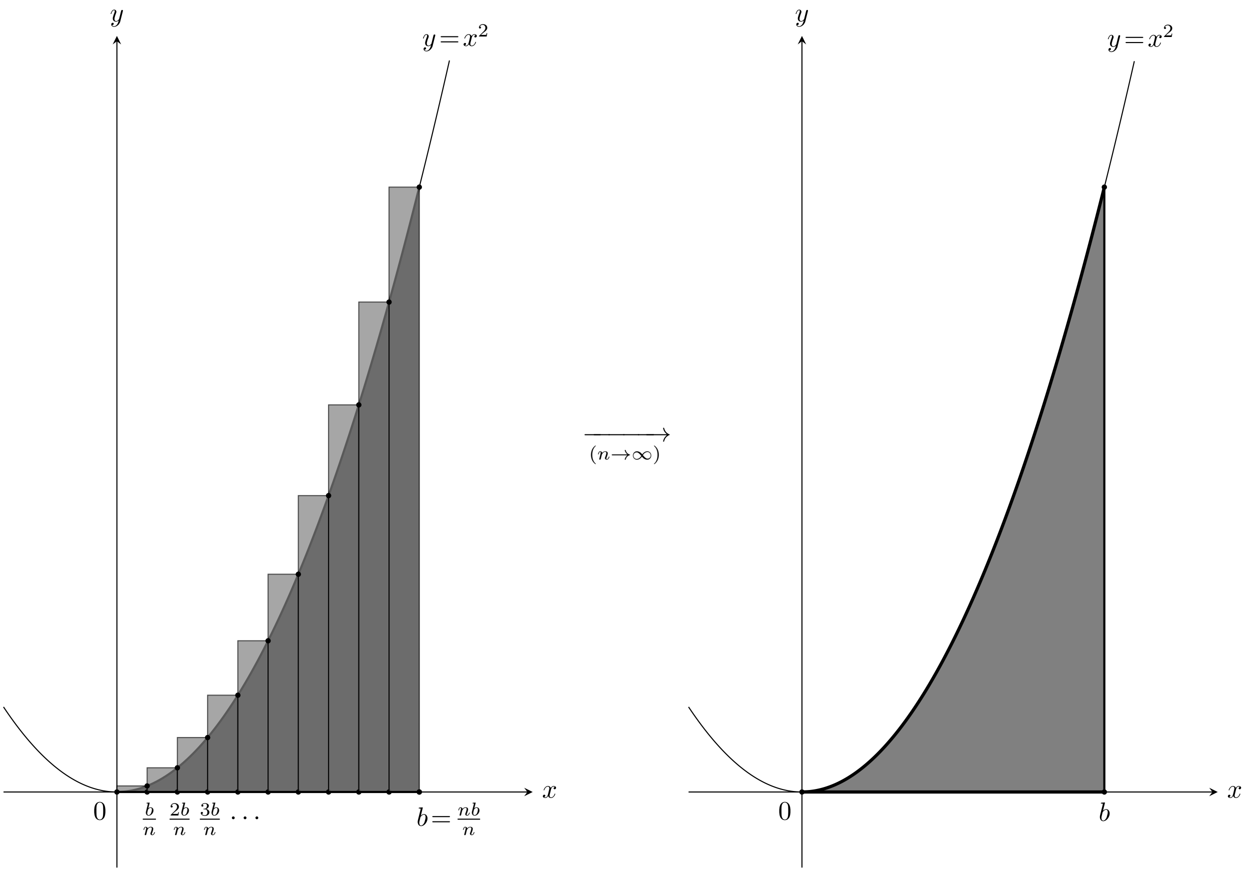
練習問題 13.2. 定義 13.1' を踏まえて, 定積分 $\displaystyle\int_a^b x^2\ dx$ の値を求めよ.

解答. はじめに, $a=0$ の場合, 任意の実数 $b>0$ に対して, 次の等式が成り立つといえる:

$$\int_0^b x^2\ dx = \frac{b^3}{3}. \tag{$*$}$$

実際, 下図のように, 積分区間を $[0,b]=[0,b/n]\cup[b/n,2b/n]\cup[2b/n,3b/n]\cup\cdots\cup[(n-1)b/n,b]$ と n 等分割して, 各小区間の右端での被積分関数の値を基準に "長方形の面積の有限和の極限" を求めてみると,

$$\begin{aligned}\int_0^b x^2\ dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i\,b}{n}\right)^2\frac{b}{n} \quad (\text{cf. 定義 13.1'})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{2\,b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.\end{aligned}$$



また, この $(*)$ から, 一般に

$$\int_a^b x^2\ dx = \frac{1}{3}\,(b^3-a^3) \tag{$**$}$$

であることもわかる: 実際, 補題 13.4 (1) から, $\displaystyle\int_0^a x^2\ dx + \int_a^b x^2\ dx = \int_0^b x^2\ dx$ であるといえるので, すなわち,

$$\int_a^b x^2\ dx = \int_0^b x^2\ dx - \int_0^a x^2\ dx \overset{(*)}{=} \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}\,(b^3-a^3)\,.$$

□

13.2 不定積分・原始関数

実際に, 様々な (連続関数の) 定積分の値を合理的に調べるために, 次のような概念を導入する:

定義 13.5 (不定積分, 原始関数)**.** $f(x)$ $(x \in [a,b])$ は連続関数であるとする.

(1) 任意に与えられた定点 $c \in [a,b]$ に対して,

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b]) \tag{13.1}$$

のような形で表される関数 $F(x)$ $(x \in [a,b])$ のことを, $f(x)$ の**不定積分**という.

(2) (1 階) 微分方程式

$$F'(x) = f(x) \quad (x \in [a,b]) \tag{13.2}$$

を満たすような (微分可能な) 関数 $F(x)$ $(x \in [a,b])$ のことを, $f(x)$ の**原始関数**という.

注意 13.6. (1) 与えられた一つの連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ に対して, その不定積分は (定点 $c \in [a,b]$ の取り方に依存して定義されるので) 無数に存在する. しかし, 任意の定点 $c_1, c_2 \in [a,b]$ に対して定義される $f(x)$ の不定積分を, それぞれ,

$$F_1(x) = \int_{c_1}^x f(t)\,dt, \quad F_2(x) = \int_{c_2}^x f(t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

とおくと, 任意の $x \in [a,b]$ に対して

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= \int_{c_1}^x f(t)\,dt - \int_{c_2}^x f(t)\,dt = \int_{c_1}^x f(t)\,dt + \int_x^{c_2} f(t)\,dt \quad (\text{cf. 定義 13.1}) \\ &= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt \quad (\text{cf. 補題 13.4 (1)}). \end{aligned}$$

すなわち, $F_1(x) - F_2(x) = C \iff F_1(x) = F_2(x) + C$ $(x \in [a,b])$ となるような (実) 定数 $C \in \mathbb{R}$ が必ず存在するといえる. 従って, $f(x)$ $(x \in [a,b])$ の "すべての不定積分からなる集合" を $\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ (※ **Leibniz の記法**) と書くことにすると,

$$\int f(x)\,dx = \{\, F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \,\} \quad (\text{但し, } F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \ (x \in [a,b]) \text{ とする}). \tag{13.3}$$

尚, この (13.3) を省略して次のように書き表す:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (x \in [a,b])\text{[*4]}. \tag{13.3'}$$

(2) 上述の (1) と同様, 与えられた一つの連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ に対して, その原始関数もまた無数に存在する (実際, $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ ならば, 任意の定数 $C \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{F(x) + C\}' = F'(x) = f(x) \quad (x \in [a,b])$$

となる). しかし, (Lagrange の) 平均値定理からの帰結により,

$$\begin{aligned} F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \ (x \in [a,b]) &\Longrightarrow \{F_1(x) - F_2(x)\}' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ (x \in [a,b]) \\ &\Longrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C \ (x \in [a,b]) \text{ となるような定数 } C \ (\in \mathbb{R}) \text{ が存在する}. \end{aligned}$$

すなわち, $f(x)$ に対して無数に存在する原始関数もまた**定数部分の差を除けば, 本質的に唯一つである**といえる.

補題 13.7. 任意に与えられた連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ に対して, その不定積分

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \left(\in \int f(x)\,dx \right)$$

は原始関数である. すなわち, $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ が成り立つ.

[*4] この右辺における任意定数 C $(\in \mathbb{R})$ のことを, 一般に**積分定数**という.

証明. 補題 13.4 を踏まえて, 実際に, 任意の $x \in [a,b]$ に対して $F'(x) = f(x) \overset{(\text{定義})}{\Longleftrightarrow} \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ となることを示せばよい: 任意の $h \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\ dt - \int_c^x f(t)\ dt\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(t)\ dt + \int_x^c f(t)\ dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt \quad (\text{cf. 補題 13.4 (1)}).\end{aligned}$$

ここで, 補題 13.4 (2) より, $\displaystyle\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c_h)$ となるような $c_h \in [x, x+h]$ が存在するので, $c_h \longrightarrow x\ (h \to 0)$ より,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(c_h) \xrightarrow[(h\to 0)]{} f(x).$$

すなわち, $F'(x) = f(x)\ (x \in [a,b])$ が成り立つ. □

命題 13.8. 任意に与えられた連続関数 $f(x)\ (x \in [a,b])$ および (微分可能な) 関数 $F(x)\ (x \in [a,b])$ に対して,

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C\ (x \in [a,b]) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x)\ (x \in [a,b]). \tag{13.4}$$

証明. [$\Longrightarrow$] これは注意 13.6 (1) と補題 13.7 で既に示した. [$\Longleftarrow$] 実際, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に対して, $F_1(x) = F(x)$, $F_2(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt\ (x \in [a,b])$ とすると, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)\ (x \in [a,b])$ となる (cf. 補題 13.7). ここで, 注意 13.6 (2) と同様に (Lagrange の) 平均値定理からの帰結により,

$$F_1(x) = F_2(x) + C \Longleftrightarrow F(x) = \int_c^x f(t)\ dt + C$$

となるような定数 $C\ (\in \mathbb{R})$ が存在する. 従って, (13.3) より, $F(x) \in \displaystyle\int f(x)\ dx \Longleftrightarrow \int f(x)\ dx = F(x) + C$. □

13.3 微分積分学の基本定理

定理 13.9 (Newton, Leibniz による積分の計算原理; **微分積分学の基本定理**). 連続関数 $f(x)\ (x \in [a,b])$ に対して,

$$F'(x) = f(x)\ (x \in [a,b]) \overset{\boxed{1}}{\Longleftrightarrow} \int f(x)\ dx = F(x) + C\ (x \in [a,b])^{*5} \overset{\boxed{2}}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

証明. $\boxed{1}$ 命題 13.8 として既に証明している. $\boxed{2}$ 実際, 任意の $c \in [a,b]$ に対して,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx + \int_a^c f(x)\ dx = \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^a f(x)\ dx \quad (\text{cf. 補題 13.4 (1)}).$$

従って, 命題 13.8 (つまり, 上述の $\boxed{1}$) を踏まえて, $f(x)$ の原始関数を $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)\,dt \left(\in \int f(x)\,dx\right)$ と書くと, これは

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) \tag{13.5}$$

であるということに他ならない. 以上によって, 題意は示された. □

補足. 関数 $F(x)\ (x \in [a,b])$ に対して, $\Big[\ F(x)\ \Big]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$ と書くことにして, 上述の定積分の計算式 (13.5) を, 次のように書き表すこともある:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_{x=a}^{x=b}. \tag{13.5'}$$

[*5] 注意 13.6 の (13.3), (13.3') で述べた通り, これは $\displaystyle\int f(x)\ dx = \{\, F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \,\}$ であることを省略して書き表している.

注意 13.10. 微分積分学の基本定理 (定理 13.9) から, 連続関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ に対して, 微分計算の知識を基に, 原始関数 $F(x)$ $(x \in [a, b])$ を具体的に求めることができれば, すべての不定積分 (の集合) $\displaystyle\int f(x)\ dx$ が特定されると同時に, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ の値もまた (13.5) (=(13.5')) のような形で簡単に求められるといえる. 尚, この定積分の計算において, (不定積分の) 積分定数 C の有無は, 最終的に得られる結果に全く影響を与えない[*6]:

$$\Big[F(x) + C \Big]_{x=a}^{x=b} = \{ F(b) + C \} - \{ F(a) + C \} = F(b) - F(a) = \Big[F(x) \Big]_{x=a}^{x=b}.$$

例題 13.11. 微分積分学の基本定理 (定理 13.9) の主張を踏まえて, 定積分 $\displaystyle\int_a^b x^2\ dx$ の値を求めよ.

解答. 被積分関数 $f(x) = x^2$ $(\, x \in [a, b] \,)$ に対して,

$$\left(x^3 \right)' = 3\,x^2 \Longrightarrow \left(\frac{1}{3}\,x^3 \right)' = x^2 = f(x)$$

であるので, $f(x)$ の原始関数 (の一つ) として $F(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3$ $(x \in [a, b])$ が得られる. 従って, 定理 13.9 から,

$$\int x^2\ dx = \frac{1}{3}\,x^3 + C \text{ (但し, } C \text{ は積分定数とする)} \Longrightarrow \int_a^b x^2\ dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3 \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{3}\,(b^3 - a^3).$$

□

注意. 上述の例題 13.11 の解答からもわかるように, 微分積分学の基本定理 (定理 13.9) を用いれば, xy-座標平面上において被積分関数 $f(x)$ $(\, x \in [a, b] \,)$ のグラフの形を具体的に図示して議論しなくても, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ の値を簡単に求めることができる (実際, 練習問題 13.2 と例題 13.11 は, どちらも同じ定積分 $\displaystyle\int_a^b x^2\ dx$ の値を求めることを目的とした問題であるが, (区分求積法を用いた) 練習問題 13.2 の解答と比較して, 明らかに (微分積分学の基本定理を用いた) 例題 13.11 の解答の方が, より "合理的" なものであるといえるだろう).

練習問題 13.3. 微分積分学の基本定理 (定理 13.9) の主張を踏まえて, 定積分

$$\int_a^b \sqrt{x}\ dx \quad \text{(但し, } 0 \le a \le b \text{ とする)}$$

の値を求めよ.

解答. 被積分関数 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ $(\, x \in [a, b] \subset [0, \infty) \,)$ に対して,

$$\left(x^{3/2} \right)' = \frac{3}{2}\,x^{1/2} \Longrightarrow \left(\frac{2}{3}\,x^{3/2} \right)' = x^{1/2} = f(x)$$

であるので, $f(x)$ の原始関数 (の一つ) として $F(x) = \dfrac{2}{3}\,x^{3/2}$ $(x \in [a, b])$ が得られる. 従って, 定理 13.9 から,

$$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}\ dx = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C \text{ (但し, } C \text{ は積分定数とする)}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \sqrt{x}\ dx = \int_a^b x^{1/2}\ dx = \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{2}{3}\,(b^{3/2} - a^{3/2}) = \frac{2}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right).$$

すなわち, $\displaystyle\int_a^b \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a} \right)$ である. □

[*6] 従って, この場合, 積分定数 C は無視してよい.

2021年度 経済数学入門 II (第14回) 講義ノート[*1]

14 より具体的な積分計算法

14.1 不定積分の計算法

微分積分学の基本定理の前半の主張 (cf. 定理 13.9 $\boxed{1}$) から, 任意の連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b] \subset X)$ に対して, その不定積分 (全体の集合) $\displaystyle\int f(x)\ dx$ を求めるには, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を (何でもいいので一つ) 求めればよい:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \ \left(\text{すなわち, } \int f(x)\ dx = \{\, F(x) + C \mid C \in \mathbb{R} \,\}\right) \Longleftrightarrow F'(x) = f(x). \qquad (\heartsuit)$$

このことを前提として, 実際に与えられた $f(x)$ (被積分関数) に対して $\displaystyle\int f(x)\ dx$ を具体的に求める方法を紹介する. 尚, 簡単のため, 以下では不定積分における**積分定数 C は省略する**こととする.

定理 14.0 (**基本的な初等関数の不定積分**). 以下のような不定積分の公式が, 一般に成立する[*2]:

(i) $$\boldsymbol{\int x^a\ dx = \begin{cases} \dfrac{x^{a+1}}{a+1} & (a \neq -1) \\ \log|x| & (a = -1). \end{cases}}$$

(ii) $$\boldsymbol{\int e^x\ dx = e^x} \ \left(\xrightarrow{\text{一般形}} \int b^x\ dx = \frac{b^x}{\log b} \ (\text{但し, } 0 < b \neq 1 \text{ とする}) \right).$$

(iii) $$\boldsymbol{\int \sin x\ dx = -\cos x,} \quad \boldsymbol{\int \cos x\ dx = \sin x,} \quad \boldsymbol{\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x,} \quad \int \tan x\ dx = -\log|\cos x|.$$

(iv) $$\int \log|x|\ dx = x\log|x| - x.$$

(v) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ \left(\xrightarrow{\text{一般形}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}\ dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+c}\right) \ (\text{但し, } c > 0 \text{ とする}) \right).$$

証明. 実際, それぞれの公式の右辺の関数を微分すると, 左辺の被積分関数に一致することがわかる (cf. ($\heartsuit$)). □

定理 14.1 (**不定積分の線形性 = 和・定数倍の積分法**). 同じ閉区間 I $(\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty))$ の上で定義された連続関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in I)$ と定数 α, β $(\in \mathbb{R})$ に対して,

$$\int \{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\}\ dx = \alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx \quad (x \in I). \qquad (14.1)$$

証明. $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ $(x \in I)$ であるとすると, 上述の ($\heartsuit$) から,

$$\int f(x)\ dx = F(x)\,(+C)\,, \ \int g(x)\ dx = G(x)\,(+C)\,.$$

ここで, **和・定数倍の微分法則**から,

$$\{\, \alpha\, F(x) + \beta\, G(x) \,\}' = \alpha\, F'(x) + \beta\, G'(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) \quad (x \in I).$$

すなわち, 上述の ($\heartsuit$) から,

$$\int \{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\}\ dx = \{\alpha\, F(x) + \beta\, G(x)\}\,(+C)$$

であるといえる. □

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] これらの公式の中で**太字で強調されたもの**は, 今後, 様々な積分計算を行う際の基本公式 (**基礎積分公式**) であるので, 覚えておくとよい.

定理 14.2 (置換積分法/積分変数変換法). 関数 $f(x)$ は閉区間 I において C^1 級[*3]であり, また, 関数 $g(y)$ $(y \in J)$ は $f(x)$ $(x \in I)$ の値域 $f(I) := \{\, y = f(x) \mid x \in I \,\}$ $(\subset J)$ において連続であるとする. このとき,

$$\int g\big(f(x)\big) \times \boxed{f'(x)}\ dx \overset{(※)}{=} \left(\int g(y) \boxed{\frac{dy}{\cancel{dx}}} \cancel{dx} = \right) \int g(y)\ dy \quad (※\ \boldsymbol{y = f(x)}\ (x \in I)\ \text{とおく}). \tag{14.2}$$

証明. $\displaystyle\int g(y)\ dy = G(y)\,(+C) \overset{(\heartsuit)}{\Longleftrightarrow} \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{G'(y) = g(y)}$ $(\, y \in f(I) \subset J\,)$ であるならば, **合成関数の微分法則**から, 任意の $x \in I$ に対して,

$$\big\{\, \boldsymbol{G}\big(\,\boldsymbol{f(x)}\,\big) \,\big\}' = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\boldsymbol{G'}\big(\,\boldsymbol{f(x)}\,\big)} \times \boldsymbol{f'(x)} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{g\big(\,f(x)\,\big)} \times f'(x).$$

すなわち, $\big\{\, G\big(\,f(x)\,\big) \,\big\}' = g\big(\,f(x)\,\big) \times f'(x)$ $(x \in I)$ が成り立つ. このことから, $(\heartsuit)$ により,

$$\int g\big(\,f(x)\,\big) \times f'(x)\ dx = G(f(x))\,(+C) = G(y)\,(+C) \quad (\, y = f(x) \in f(I)\,)$$

であるといえるので, (14.2) が成り立つといえる. □

系 14.3 (定理 14.0 (i) の一般形)**.** 関数 $f(x)$ は閉区間 I において C^1 級であるとする. このとき, 任意の定数 α $(\in \mathbb{R})$ に対して,

$$\int \{f(x)\}^{\alpha}\, f'(x)\ dx \left(= \int \{f(x)\}^{\alpha}\, \frac{d}{dx}\big(\,f(x)\,\big)\ dx \right) = \begin{cases} \dfrac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \log|f(x)| & (\alpha = -1). \end{cases}$$

但し, $\alpha = -1$ の場合は $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ であるとする.

証明. $y = f(x)$ $(x \in I)$ とおくと, 置換積分法 (cf. 定理 14.2) により,

$$\int \{f(x)\}^{\alpha}\, f'(x)\ dx \left(= \int y^{\alpha}\, \frac{dy}{dx}\ dx \right) \overset{(14.2)}{=} \int y^{\alpha}\ dy = \begin{cases} \dfrac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \log|y| & (\alpha = -1) \end{cases} \qquad (\text{cf. 定理 14.0 (i)})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \log|f(x)| & (\alpha = -1). \end{cases}$$

□

注意 14.4. 特に, 系 14.3 の主張の $\alpha = -1$ の場合として, $f(x)$ が (有界な) 閉区間 I において C^1 級であり, また, $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$ であるならば, 次のような公式が成り立つといえる:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)| \quad (x \in I)$$

これが, **対数微分法の基本原理** $\left(\text{すなわち}, \ \{\log|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right)$ の逆の主張に相当することは明らかである.

定理 14.5 (部分積分法). 関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 I において C^1 級であるならば,

$$\int f(x)\, g'(x)\ dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\ dx \quad (x \in I). \tag{14.3}$$

証明. $f(x)$, $g(x)$ $(x \in I)$ は共に微分可能であるので, **積の微分法則**から,

$$\{\, \boldsymbol{f(x)\, g(x)} \,\}' = \boldsymbol{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)} \quad (x \in I).$$

一方, $(\heartsuit)$ から, $\displaystyle\int \{\, f(x)\, g(x) \,\}'\ dx = f(x)\, g(x)\,(+C)$ であることは明らかである. 従って, 定理 14.1 により,

$$f(x)\, g(x)\,(+C) = \int \{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)\}\ dx \overset{(14.1)}{=} \int f'(x)\, g(x)\ dx + \int f(x)\, g'(x)\ dx \quad (x \in I).$$

この等式を整理することで (14.3) が得られる. □

[*3] $f(x)$ $(x \in I)$ が微分可能で, 更に, その導関数 $\dfrac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ $(x \in I)$ が連続であるとき, 関数 $f(x)$ $(x \in I)$ は $\boldsymbol{C^1}$ **級**であるという.

系 14.6 (特殊な形の部分積分法)**.** 関数 $f(x)$ が閉区間 I において C^1 級であるならば,

$$\int f(x)\ dx \left(= \int 1 \times f(x)\ dx\right) = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\ dx \quad (x \in I).$$

証明. これは, 部分積分法の一般形 (14.3) を $g(x) = x$ ($\Longrightarrow g'(x) = 1$) として適用することで直ちに得られる. □

例 14.7 (cf. 定理 14.0 (iv))**.** $x = 0$ を含まない閉区間 I ($\subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$) の上において

$$\int \log|x|\ dx = x\ \log|x| - x \quad (\,x \in I\,).$$

実際, $f(x) = \log|x|$ ($x \neq 0$) として, 系 14.6 を適用すると,

$$\begin{aligned}\int \log|x|\ dx \left(= \int 1 \times \log|x|\ dx\right) &= x\ \log|x| - \int x\ \{\log|x|\}'\ dx \\ &= x\ \log|x| - \int x \times \frac{1}{x}\ dx \\ &= x\ \log|x| - \int 1\ dx = x\ \log|x| - x.\end{aligned}$$

定理 14.0 で述べた基本的な初等関数の不定積分の公式を踏まえて, 置換積分法・部分積分法を適用することにより, 様々な初等関数の不定積分を具体的に求めることができる.

練習問題 14.1. 閉区間 I ($\subset (0, \infty)$) において, 次の不定積分を求めよ (但し, **積分定数は省略してよい**とする).

$$(1)\ \int \sqrt{x}\ dx \qquad (2)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad (3)\ \int \frac{3\,x+1}{\sqrt{x}}\ dx$$

解答. (1) $\sqrt{x} = x^{1/2}$ として, 定理 14.0 (i) から, $\displaystyle\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2}\ dx = \frac{x^{(1/2)+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,x^{3/2} = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x}.$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ として, 定理 14.0 (i) から, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \int x^{-1/2}\ dx = \frac{x^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 2\,x^{1/2} = 2\,\sqrt{x}.$

(3) $\displaystyle\frac{3\,x+1}{\sqrt{x}} = 3\,\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3\,x^{1/2} + x^{-1/2}$ であるので, 前問 (1), (2) で得られた結果と定理 14.1 から,

$$\begin{aligned}\int \frac{3\,x+1}{\sqrt{x}}\ dx = \int \left(3\,x^{1/2} + x^{-1/2}\right)\ dx &\overset{(14.1)}{=} 3\int x^{1/2}\ dx + \int x^{-1/2}\ dx \\ &= 3 \times \frac{2}{3}\,x^{3/2} + 2\,x^{1/2} \\ &= 2\,x^{3/2} + 2\,x^{1/2} = 2\,(x+1)\,x^{1/2} = 2\,(x+1)\sqrt{x}.\end{aligned}$$

□

練習問題 14.2. 次の不定積分を求めよ (但し, **積分定数は省略してよい**とする).

$$(1)\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx \qquad (2)\ \int \sin x\ \cos x\ dx \qquad (3)\ \int x\ e^{x^2}\ dx$$

解答. (1) $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ とおくと, $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right)' = 2\,x$ であるので, 置換積分法により,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \int \frac{1}{2} \times \frac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx &\overset{(14.1)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)'}{\sqrt{x^2+1}}\ dx \left(= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx}\ dx\right) \\ &\overset{(14.2)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y}}\ dy = \frac{1}{2}\int y^{-1/2}\ dy = \frac{1}{2} \times 2\,y^{1/2} = y^{1/2} = \sqrt{y} = \sqrt{x^2+1}.\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{y = \sin x}$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = (\sin x)' = \cos x$ であるので, 置換積分法により,

$$\int \sin x \, \cos x \; dx = \int \sin x \; (\sin x)' \; dx \left(= \int y \times \frac{dy}{dx} \; dx \right) \overset{(14.2)}{=} \int y \; dy = \frac{y^2}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

(別解) 正弦関数の 2 倍角公式から $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin(2x)$, また, $\{\cos(2x)\}' = -\sin(2x) \times (2x)' = -2\sin(2x)$ であるので, 次のようにして求めることもできる (※ここで, $y = 2x$ として置換積分法 (14.2) を用いてもよい) :

$$\int \sin x \cos x \; dx \overset{(14.1)}{=} \frac{1}{2} \int \sin(2x) \; dx \overset{(※)}{=} \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\cos(2x)}{2} \right\} = -\frac{\cos(2x)}{4} \left(= \frac{2\sin^2 x - 1}{4} = \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

(3) $\boldsymbol{y = x^2}$ とおくと, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ であることから, 置換積分法により,

$$\int x \, e^{x^2} \; dx \overset{(14.1)}{=} \frac{1}{2} \int (2x) \, e^{x^2} \; dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' \, e^{x^2} \; dx \left(= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{dx} \times e^y \; dx \right) \overset{(14.2)}{=} \frac{1}{2} \int e^y \; dy = \frac{e^y}{2} = \frac{e^{x^2}}{2}.$$

□

練習問題 14.3. 次の不定積分を求めよ (但し, **積分定数は省略してよい**とする).

$$(1) \int x \, e^x \; dx \qquad (2) \int x \log|x| \; dx \qquad (3) \int x \sin x \; dx$$

解答. (1) $(e^x)' = e^x$ であるので, 部分積分法により,

$$\int x \, e^x \; dx = \int x \, (e^x)' \; dx \overset{(14.3)}{=} x \, e^x - \int (x)' e^x \; dx = x \, e^x - \int e^x \; dx = x \, e^x - e^x = (x-1) \, e^x.$$

(2) $\left(\dfrac{x^2}{2} \right)' = x$ であるので, 部分積分法により, 任意の $x \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \int x \log|x| \; dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \right)' \log|x| \; dx &\overset{(14.3)}{=} \frac{x^2}{2} \log|x| - \int \frac{x^2}{2} \times (\log|x|)' \; dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log|x| - \int \frac{x}{2} \; dx \\ &\overset{(14.1)}{=} \frac{1}{2} \left(x^2 \log|x| - \int x \; dx \right) = \frac{1}{2} \left(x^2 \log|x| - \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

従って, $\displaystyle\int x \log|x| \; dx = \frac{1}{2} \left(x^2 \log|x| - \frac{x^2}{2} \right) = \frac{x^2}{4} (2 \log|x| - 1) \quad (x \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty))$.

(3) $(-\cos x)' = \sin x$ ($\because$ $(\cos x)' = -\sin x$) であるので, 部分積分法により,

$$\int x \sin x \; dx = \int x \, (-\cos x)' \; dx \overset{(14.3)}{=} -x \cos x + \int (x)' \cos x \; dx = -x \cos x + \int \cos x \; dx = -x \cos x + \sin x.$$

□

補足. 定理 14.0, 14.1, 14.2 & 14.5 の証明からもわかるように, 本節において紹介した一般的な不定積分の計算法は, 微分積分学の基本定理の前半の主張 (定理 13.9 $\boxed{1}$) を踏まえて, 一般的な微分計算法の "裏返し" として自然に考えられるものである:

微分 (導関数) の計算法		**不定積分 (原始関数) の計算法**
基礎微分公式	⟷	(I) 基礎積分公式
(和・差・定数倍の微分法則	⟷	不定積分の線形性)
合成関数の微分法則	⟷	(II) 置換積分法
積の微分法則	⟷	(III) 部分積分法

微分積分学の基本定理 (前半)

2021 年度 経済数学入門 II (第 15 回) 講義ノート[*1]

14.2 定積分の計算法

微分積分学の基本定理の後半の主張 (cf. 定理 13.9 $\boxed{2}$) から, 任意の連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b] \subset X)$ に対して, その不定積分 (すなわち, 原始関数) $F(x)$ が具体的に求められれば, 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ (cf. 定義 13.1) の値もまた以下のような形で具体的に求められる:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \text{ (但し, } C \text{ は積分定数とする)} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\ dx = \Big[\, F(x)\,(+C)\,\Big]_{x=a}^{x=b}$$

$$= F(b) - F(a)\,. \qquad (\diamondsuit)$$

注意. 定積分の計算原理 ($\diamondsuit$) では, **不定積分における積分定数 C の有無は, 最終的な計算結果に全く影響しない**:

$$\Big[\, F(x) + C \,\Big]_{x=a}^{x=b} = \{\, F(b) + \cancel{C} \,\} - \{\, F(a) + \cancel{C} \,\} = F(b) - F(a) = \Big[\, F(x) \,\Big]_{x=a}^{x=b}.$$

補題 14.8 (定積分の基本的性質)**.** 連続関数 $f(x)$ ($x \in [a,b] \subset X$) に対して, 一般に次のような主張が成り立つ*:*

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx = 0.$

(iii) $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$

証明. これらの主張が一般に成立することは, 定義 13.1 & 補題 13.4 (1) で既に示してあったが, 上述の ($\diamondsuit$) からも簡単に導き出すことができる: 実際, $\displaystyle\int f(x)\ dx = F(x) + C$ ($x \in [a,b]$) とすると,

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \overset{(\diamondsuit)}{=} F(b) - F(a) = -\{\, F(a) - F(b) \,\} \overset{(\diamondsuit)}{=} -\int_b^a f(x)\ dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^a f(x)\ dx \overset{(\diamondsuit)}{=} F(a) - F(a) = 0.$

(iii) $\displaystyle\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \overset{(\diamondsuit)}{=} \{\, \cancel{F(c)} - F(a) \,\} + \{\, F(b) - \cancel{F(c)} \,\} = F(b) - F(a) \overset{(\diamondsuit)}{=} \int_a^b f(x)\ dx.$ □

例 14.9. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\ dx \left(= \int x^{-3/2}\ dx = -2\,x^{-1/2} + C \right) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ (cf. 定理 14.0 (i)) であるので, ($\diamondsuit$) から,

$$\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\ dx = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_{x=1}^{x=4} = \left(-\frac{2}{2} \right) - \left(-\frac{2}{1} \right) = -1 + 2 = 1.$$

更に, 不定積分に関する定理 14.1, 14.2 & 14.5 の主張から, 一般に次のようなこともいえる:

定理 14.10 (定積分の一般的な計算方法)**.**

(1) **定積分の線形性** (cf. 定理 14.1)**:** 連続関数 $f(x)$, $g(x)$ ($x \in [a,b]$) および 定数 α, β $(\in \mathbb{R})$ に対して,

$$\int_a^b \{\, \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) \,\}\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx.$$

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

(2) **定積分の置換積分法** (cf. 定理 14.2)**:** 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ において C^1 級であり, また, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$ とする. このとき, 連続関数 $g(y)$ ($y\in f([a,b])$) に対して, $\boxed{※\ \boldsymbol{y=f(x)}\ (x\in[a,b])}$ とおくと,

$$\int_a^b g\big(f(x)\big)\times f'(x)\ dx \overset{(※)}{=} \left(\int_{\cancel{a}\rightsquigarrow\alpha}^{\cancel{b}\rightsquigarrow\beta} g(y)\ \frac{dy}{\cancel{dx}}\ \cancel{dx} = \right)\int_\alpha^\beta g(y)\ dy \qquad \left(\begin{array}{c|c} x & a\longrightarrow b \\ \hline y & \alpha\longrightarrow\beta\end{array}\right).$$

(3) **定積分の部分積分法** (cf. 定理 14.5)**:** 関数 $f(x)$, $g(x)$ ($x\in[a,b]$) が C^1 級であるとすると,

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,g(x)\ dx.$$

証明. 実際, 定理 14.1, 14.2 & 14.5 で述べた不定積分の性質と主張 (◇) を併せれば, これらの主張が得られる. □

練習問題 14.4. 次の定積分を求めよ:

$$(1)\ \int_1^2 (2\,x-1)^3\ dx \qquad (2)\ \int_0^\pi x\,\sin x\ dx \qquad (3)\ \int_1^e x^2\log x\ dx$$

解答. (1) $(2\,x-1)^3=(2\,x-1)^2\,(2\,x-1)=8\,x^3-12\,x^2+6\,x-1$ であるので, 定理 14.10 (1) から,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2\,x-1)^3\ dx = \int_1^2 (8\,x^3-12\,x^2+6\,x-1)\ dx &= 8\int_1^2 x^3\ dx - 12\int_1^2 x^2 + 6\int_1^2 x\ dx - \int_1^2 1\ dx \\ &= 8\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=1}^{x=2} - 12\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=2} + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} - \Big[x\Big]_{x=1}^{x=2} \\ &= 8\times\frac{16-1}{4} - 12\times\frac{8-1}{3} + 6\times\frac{4-1}{2} - (2-1) \\ &= 2\times 15 - 4\times 7 + 3^2 - 1 = 30-28+9-1 = 10\,.\end{aligned}$$

あるいは, $y=2\,x-1$ $\left(\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx}=\big(2\,x-1\big)'=2,\ \begin{array}{c|c} x & 1\longrightarrow 2 \\ \hline y & 1\longrightarrow 3\end{array}\right)$ として, **定積分の置換積分法** (定理 14.10 (2)) を用いてもよい:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2\,x-1)^3\ dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2\,x-1)^3\times 2\ dx \left(=\frac{1}{2}\int_1^3 y^3\ \frac{dy}{\cancel{dx}}\ \cancel{dx}\right) &= \frac{1}{2}\int_1^3 y^3\ dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{1}{2}\times\frac{81-1}{4} = \frac{80}{8} = 10\,.\end{aligned}$$

(2) **定積分の部分積分法** (定理 14.10 (3)) を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,\sin x\ dx = \int_0^\pi x\,(-\cos x)'\ dx &= \Big[-x\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x\ dx \\ &= \pi + \Big[\sin x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = \pi \quad (\text{cf. 定理 14.0 (iii)}).\end{aligned}$$

(3) **定積分の部分積分法** (定理 14.10 (3)) を用いて

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\log x\ dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\ dx = \left[\frac{x^3\log x}{3}\right]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\ dx &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\ dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=e} \quad (\text{cf. 定理 14.0 (i)}) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9} = \frac{2\,e^3+1}{9}.\end{aligned}$$

[**経済数学入門 II 終わり**]