2021 年度 経済数学入門 I (第 1 & 2 回) 講義ノート[*1]

この講義は, 表題の示す通り, **経済数学** (i.e., 経済学において用いられる数学について取り扱う教育科目), ひいては, **数理経済学** (i.e., 数学を積極的に用いて理論的に研究を行う経済学の一分野) への入門編として実施するものである.

0　実数の概念

一口に "数" といっても色々な種類のものがある. 例えば, 様々なものの '個数' を取り扱う際に自然と考えられる

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, \cdots\cdots$$

のような**自然数** (natural number) は, 万人にとって最も親しみやすい数の概念であるといえるだろう. また, 2 つの自然数の '差' について議論する際には 0 (ゼロ) や自然数に符号 $-$ (マイナス) を付した数 $-1, -2, -3, \cdots$ (**負の整数**) も含めて, 一般に

$$\cdots\cdots\cdots\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

のような**整数** (integer) と呼ばれる数の概念を考えることが自然である. 更に, 2 つの整数 m, n の '商' (あるいは, '比') として, 以下のような形で定義される数 $\dfrac{m}{n}$ は, 一般に**有理数** (rational number) と呼ばれるものである:

$$x = \frac{m}{n} \text{ (但し, } m, n \text{ は整数とし, 更に “} n \neq 0 \text{” とする}^{*2}) \overset{(\text{定義})}{\Longleftrightarrow} n\,x = m \Longleftrightarrow m : n = x : 1.$$

注意. 上で述べた自然数, 整数, 有理数の全体集合は, それぞれ, 次のように書き表される:

(i) **自然数** (= **正の整数**) **全体の集合：** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

(ii) **整数全体の集合：** $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$.　(**非負の整数全体の集合：** $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.)

(iii) **有理数全体の集合：** $\mathbb{Q} = \left\{ x = \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0 \right\}$.

尚, これらの集合の間には, 次のような包含関係が成立しているといえる:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \quad \left(\because\ \mathbb{N} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n > 0 \} \subsetneq \mathbb{Z},\ \mathbb{Z} = \left\{ m = \frac{m}{1} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneq \mathbb{Q} \right).$$

以後の議論で取り扱う定数, 変数, 関数の値などとしては, もう少し一般的な "実数" と呼ばれる数の概念を考える:

定義 0.1 (実数)**.** 次のような形で与えられる数 x を, 一般に**実数** (real number) という:

$$x = \pm\, \boldsymbol{a_0 \,.\, a_1\, a_2\, \cdots\, a_n\, \cdots} \quad \left(\begin{array}{c} \text{但し, } a_0 \geq 0 \text{ は (非負の) 整数とし, “.”(浮動小数点) の右側に並んだ} \\ \text{数 } a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \text{ は } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ のいづれかとする} \end{array} \right). \tag{0.1}$$

尚, このような数は **10 進数** (decimal number) とも呼ばれる. すなわち, 実数とは, 一般に<u>10 進数として表記されるような数</u> のことなのである. また, 実数全体の集合は (この講義も含めて) $\mathbb{R}$ として書き表すことが一般的である.

注意. (0.1) の右辺は, より厳密にいえば, 任意の非負整数 a_0 (≥ 0) と 0 以上 9 以下の数列 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ から

$$a_0 \,.\, a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n \cdots := a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \left(= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \right) \tag{0.1'}$$

という無限級数 (無限和)[*3]として定義される数を, 更に (± 1) 倍したものである. 尚, (0.1') のような数について,

$$a_0 \,.\, a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n \cdots \overset{(0.1')}{=} a_0 + (\, 0 \,.\, a_1\, a_2\, a_3\, \cdots a_n \cdots)$$

と分解して, a_0 を (この実数の) **整数部分**といい, また, $0 \,.\, a_1\, a_2\, a_3\, \cdots a_n \cdots \left(= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \right)$ を**小数部分**という.

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] $n = 0$ の場合, 定義式が $0\,x = m$ となってしまうので, $x = \dfrac{m}{0}$ という有理数は定義できない.

[*3] 無限級数の一般論については, 後期に開講予定の『経済数学入門 II』で詳しく解説する (予定).

定義 0.1 で述べた実数の中には, 全ての有理数が含まれている. すなわち, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ である. (実際, 任意の有理数 $x = \dfrac{m}{n}$ $(\in \mathbb{Q})$ に対して, 分子の整数 m を分母の整数 n $(\neq 0)$ で除算 (割り算) することで, x が (0.1) のような形で (10 進数として) 表されることがわかる.) 例えば,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} = 0.5000\cdots (= 0.5), && \frac{3}{2} = 1.5000\cdots (= 1.5),\\
&\frac{1}{3} = 0.3333\cdots (= 0.\dot{3}), && \frac{2}{3} = 0.6666\cdots (= 0.\dot{6}),\\
&\frac{1}{4} = 0.2500\cdots (= 0.25), && \frac{1}{5} = 0.2000\cdots (= 0.2),\\
&\frac{1}{6} = 0.1666\cdots (= 0.1\dot{6}), && \frac{5}{6} = 0.8333\cdots (= 0.8\dot{3}),\\
&\frac{1}{7} = 0.142857142857\cdots (= 0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}), && \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

これらの例からもわかるように, 実数としてみたときの有理数の特徴として, 実は, 一般に次のようなことがいえる[*4]:

$$x \in \mathbb{Q}\ (\subset \mathbb{R}) \iff x \text{ の小数部分は “有限小数”, あるいは, “循環 (無限) 小数” のいづれかである.}$$

このことを踏まえて, 有理数としては表すことができない (つまり, 小数部分が “非循環 (無限) 小数” となるような) 実数のことを, 一般に**無理数** (irrational number) という. 例えば, (平方数ではないような) 自然数 n の平方根 $\sqrt{n}$ や円周率 π, Napier 数 (あるいは, 自然対数の底) e などは, 実際に無理数であることがよく知られている:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.7320508075\cdots, \quad \pi = 3.1415926535\cdots, \quad e = 2.7182818284\cdots.$$

つまり, 一般的によく聞く “全ての有理数と無理数を統合してできる数の概念が実数である” という主張は, 定義 0.1 からすれば, 至極当たり前のことなのである.

尚, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は**数直線** (number line) と自然に同一視することができる. すなわち, 任意の実数 (10 進数) は, その数値に対応した位置にある直線上の ‘点’ として理解することもできる.

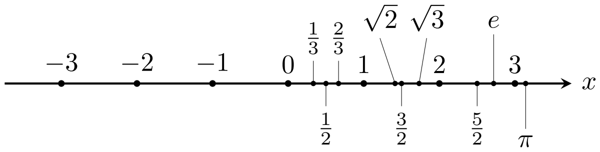


図 0.1　数直線 (= 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を可視化したもの)

補足. 何故, ありとあらゆる実数を全て並べると数直線ができるのか？ その理由について詳しく説明するためには, ここで “実数の連続性” という性質について解説しなければならないのだが, 紙面の都合上, ここでは省略する[*5].

数直線全体ではなく, その特定の部分だけに限定して議論を行う際には, 次のような集合を考えることが多い:

定義 0.2 (区間)**.** 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合として, 以下のような形のものを一般に**区間** (interval) という: $a, b \in \mathbb{R}$ (但し, $a < b$ とする) に対して,

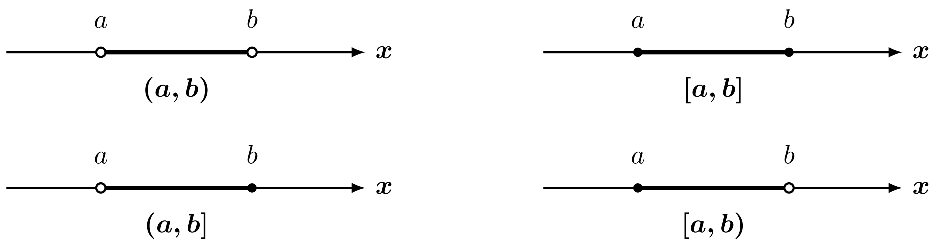
$$(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \,\} \ \cdots \boxed{\textbf{開区間}}, \quad [a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\} \ \cdots \boxed{\textbf{閉区間}},$$

$$(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \,\} \ \cdots \boxed{\textbf{(下) 半開区間}}, \quad [a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \,\} \ \cdots \boxed{\textbf{(上) 半開区間}}.$$

これらの区間を, 実際に数直線上に図示してみると, 次のようになる (尚, 開区間や半開区間の境界にある白抜きの点は, その点が対象区間には含まれていないことを意味している) :

[*4] ここでは詳しく述べないが, 有理数と実数 (10 進数) の定義を正確に理解してさえいれば, これは比較的簡単に証明できることである.

[*5] **もし興味のある方がいれば, 個別に解説したいと思いますので, その際は気軽に質問してください** (河村).

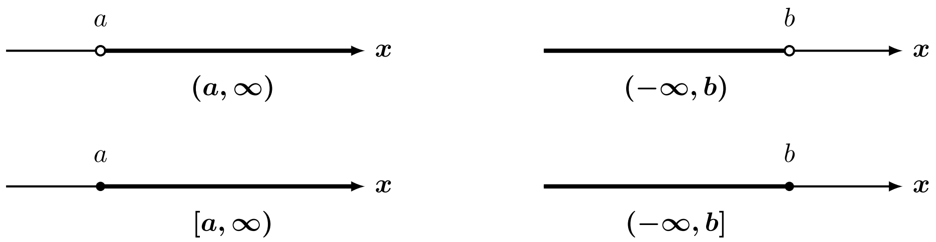


また, 形式的な記号 $\pm\infty$ (**無限大**) を, どのような実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対しても $-\infty < x < \infty$ となるようなもの[*6]として導入しておくと,

$$(a, \infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x \ (< \infty) \,\}, \qquad (-\infty, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (-\infty <) \ x < b \,\},$$

$$[a, \infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \ (< \infty) \,\}, \qquad (-\infty, b] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (-\infty <) \ x \leq b \,\}$$

のような形の区間 (無限区間) を考えることもできる.



更に, 上で述べた $\pm\infty$ の定義から, 実数全体の集合は $\mathbb{R} = \{\, x \ (\in \mathbb{R}) \mid -\infty < x < \infty \,\}$ と考えることができるので, 開区間として, これを "$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$" と書き表すこともある.

また, 直線や曲線など, 様々な平面図形を数学的に理解するために, 次のような概念を導入しておく:

定義 0.3 (xy-座標平面)**.** 二つの独立した方向に (無限に) 展開された平面の上で, 次の図 0.2 のように 2 本の数直線が互いに値 0 の点で直角に交わる (直交する) ように描かれたものを考える. ここで, 横向きの数直線のことを ***x*-軸**, 縦向きの数直線のことを ***y*-軸**と呼び, 更に, x-軸と y-軸の交点 O を**原点**と呼ぶことにする.

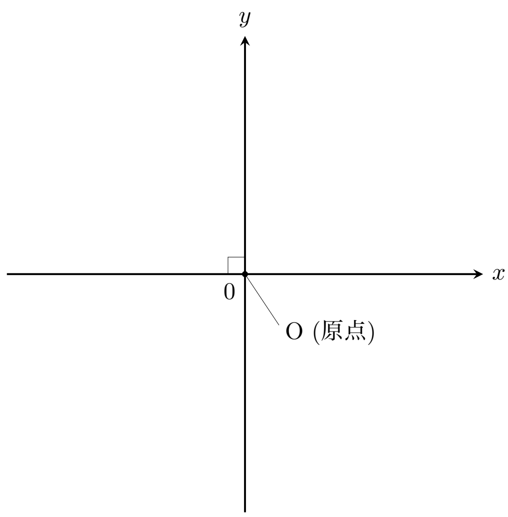


図 0.2　xy-座標平面

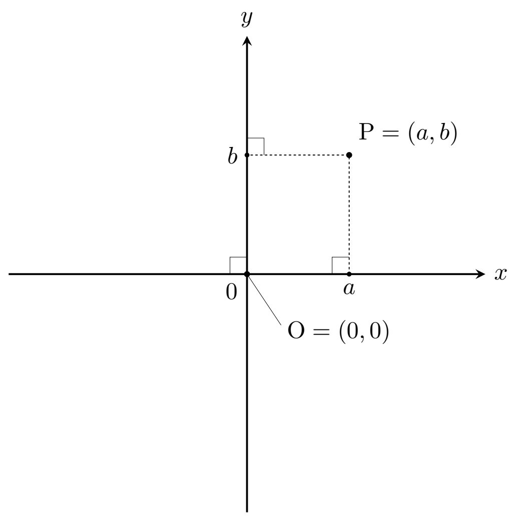


図 0.3　xy-座標平面における各点の座標

尚, このような平面上では任意の点 P の位置が, 点 P から x-軸へ下ろした垂線の足の数値 a と y-軸への垂線の足の数値 b の組 (a, b) によって一意的に表される (cf. 図 0.3)[*7]. 以上のことを踏まえて, 各点の位置を識別する基準となる

[*6] 実数 (=10 進数) の値は常に有限である. 従って, それを表現するために正負の両方向に有限のものと対となる "無限" の概念として $\pm\infty$ を形式的に考えるのである. 尚, これらは当然ながら "有限ではない" ので $\pm\infty \notin \mathbb{R}$ である.

[*7] このとき, 点 P の ***xy*-座標**は (a, b) であるといい, これを省略して "$\mathrm{P} = (a, b)$" と書き表す. 特に, 原点 O の xy-座標は $(0, 0)$ である.

ような 2 本の座標軸 (x-軸, y-軸) が導入された平面のことを ***xy*-座標平面** (xy-coordinate plane) という[*8].

注意 0.4. xy-座標平面上の点 $\mathrm{P} = (a, b)$ と原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ の間の距離 (i.e., 線分 OP の長さ) は $\sqrt{a^2 + b^2}$ である[*9].

補足. 上述の通り, xy-座標平面上の各点は二つの独立した実数の組と同一視されることから, xy-座標平面全体を集合として, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の直積集合

$$\mathbb{R}^2 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{ \, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \, \}$$

で書き表すこともある.

注意 0.5. 定義 0.3 と同様に, 三つの独立した方向に展開された (3 次元の) 空間に 3 本の座標軸 (x-軸, y-軸, z-軸) を導入することで, ***xyz*-座標空間**と呼ばれるものを考えることもできる. 尚, この空間も三つの独立した実数の組全体の集合と同一視することができるので, $\mathbb{R}^3 \ (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \{ \, (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \, \}$ として書き表すこともある.

練習問題 0.1. 次の有理数を, 実際に (0.1) のような形で (実数として) 表せ: (1) $\dfrac{1}{9}$ (2) $\dfrac{23}{99}$ (3) $\dfrac{456}{999}$

解答. 実際に, それぞれ, 分子を分母で割り算してみればよい:

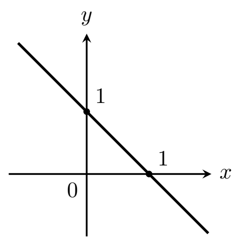
$$(1)\ \frac{1}{9} = 0.111111\cdots (= 0.\dot{1}). \qquad (2)\ \frac{23}{99} = 0.232323\cdots (= 0.\dot{2}\dot{3}). \qquad (3)\ \frac{456}{999} = 0.456456\cdots (= 0.\dot{4}\dot{5}\dot{6}). \qquad \square$$

練習問題 0.2. xy-座標平面上において, 次のような方程式を満たすような点 (x, y) 全体が描く軌跡を図示せよ:

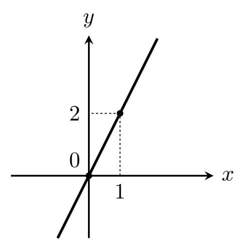
$$(1)\ x + y = 1 \qquad (2)\ 2\,x - y = 0 \qquad (3)\ y = x^2 \qquad (4)\ x = y^2$$

解答. 以下の通りである:

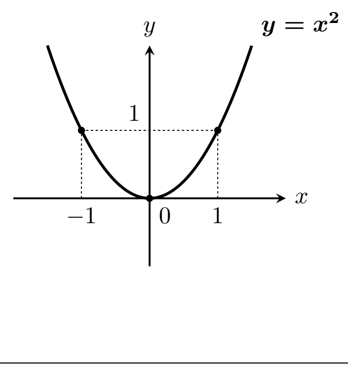
(1) $x + y = 1 \iff y = -x + 1$ であるので,



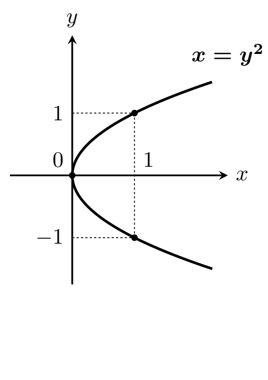
(2) $2\,x - y = 0 \iff y = 2\,x$ であるので,



(3) 任意の実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して $(-x)^2 = x^2$ であるので, 次のような放物線である.



(4) 問題の方程式は, 前問 (3) の方程式 $y = x^2$ の x, y の役割を入れ替えたものであるので,



$\square$

[*8] 厳密にいえば, これは ***xy*-直交座標平面**というべきものであるが, 省略して, 単に ***xy*-平面** (xy-plane) ということの方が多い.
[*9] 実際, 図 0.3 で線分 OP を斜辺とする直角三角形を考えれば, (Pythagoras の) 三平方の定理から, $|\mathrm{OP}|^2 = a^2 + b^2$ であるといえる.

1　関数とグラフ

1.1　関数の概念

様々な数を一つ一つ個別に理解するよりも, 特定の規則 (rule) に従って複数の数をまとめて理解する方が合理的である. このような理念のもとで考え出された概念が, 一般に “関数” と呼ばれるものである:

定義 1.1 (1 変数実数値関数)**.** 少なくとも一つ以上の実数からなる集合 X (i.e., $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$) が与えられているとする. このとき, 任意の変数 $x \in X$ に対して, 常に “唯一つ”[*1] の値 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ を対応させるような規則 f のことを, X の上に定義された (実数値) **関数** (function) という.

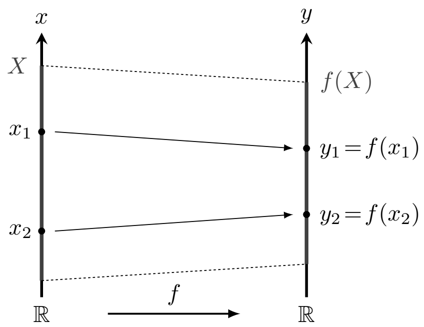


図 1.1　関数 $f(x)$ $(x \in X)$ のイメージ

また, ここで考えられる全ての変数 x が属する集合 X を f の**定義域** (domain; domain of definition) といい, 更に, f の値として取り得る全ての実数のなす集合

$$f(X) = \{\, y = f(x) \mid x \in X \,\}\,(\subset \mathbb{R})$$

を f の**値域** (codomain; image) という.

補足. 数学では, 一般に与えられた二つの集合 X, Y $(\neq \phi)$ の間で, 任意の要素 $x \in X$ に対して, 常に唯一つの要素 $y = f(x) \in Y$ を対応させる規則 f のことを, 集合 X から集合 Y への**写像** (mapping) といい, これを

$$f : X \longrightarrow Y,\ x \longmapsto y = f(x)$$

と書き表す. 従って, 上の定義 1.1 で述べた (1 変数) 関数 f とは, 集合 X $(\subset \mathbb{R})$ から集合 $\mathbb{R}$ (より厳密には, その部分集合 $f(X)$) への写像 f のことに他ならない.

例 1.2 (単項式関数)**.** 実数全体の集合 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ を定義域とする関数の基本例として, 以下の 3 つが挙げられる:

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2.$$

尚, これらの関数の値域は, それぞれ, 次のようなものとなっている:

$$f_0(\mathbb{R}) = \{1\}\ \cdots\ (1\ \text{点集合}),\quad f_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\ \cdots\ (\text{実数全体}),\quad f_2(\mathbb{R}) = [\,0, \infty)\ \cdots\ (\text{非負の実数全体}).$$

一般に, 非負の整数 $n \geq 0$ に対して与えられる関数 $f_n(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ を n 次の**単項式** (monomial) **関数**という.

定義 1.3 (関数のグラフ)**.** 与えられた関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

“xy-座標平面において方程式 $y = f(x)$ $(x \in X)$ を満たすような点 (x, y) 全体が描く軌跡”

のことを, 関数 f の**グラフ** (graph) という.

[*1] これは “一つの変数 x に対応する値が複数存在しない” ということ, すなわち, “$x_1 = x_2$ $(\in X) \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)\,(\in \mathbb{R})$” が成り立つことを意味している. これは関数が満たすべき唯一の条件といってもよい.

関数のグラフの形を調べることで, 変数 x が定義域の上を変動するのに応じて, その値がどのように変化するのかを視覚的に理解することができる. 例えば, 例 1.2 で述べた 3 つの (単項式) 関数のグラフは, それぞれ, 次のような形である:

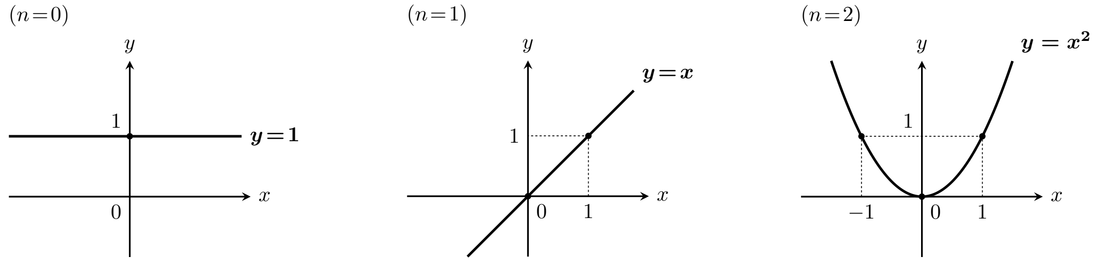


図 1.2　関数 $f_n(x) = x^n$ $(n = 0, 1, 2)$ のグラフ

もう少し一般的な関数の例として, 次のようなものを紹介しておく:

定義 1.4 (多項式関数・有理関数[*2]). 実数の四則演算のみを用いて, 以下のような関数を考えることができる:

(1) 任意の非負整数 $n \geq 0$ および (実) 定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ (但し, $a_n \neq 0$ とする) に対して与えられる関数

$$f(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0 \quad (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,) \tag{1.1}$$

のことを, 一般に n 次の (もしくは, 次数が n の) **多項式** (polynomial) **関数**という. 特に, 0 次の多項式関数は一般に**定数関数** (constant function) と呼ばれるものに他ならない.

(2) 二つの多項式関数 $p(x)$, $q(x)$ (但し, $q(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ とする[*3]) に対して与えられる関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad (\, x \in \{\, x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\,\}) \tag{1.2}$$

のことを, 一般に**有理関数** (rational function) という.

注意 1.5. (1) 有理関数 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ として, 分母の多項式関数 $q(x)$ が (値が 0 でないような) 定数関数であるものを考えると, それは多項式関数に他ならない: 実際, $p(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0$, $q(x) = b_0\,(\neq 0)$ とすると,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0}{b_0} = \left(\frac{a_n}{b_0}\right) x^n + \cdots + \left(\frac{a_1}{b_0}\right) x + \left(\frac{a_0}{b_0}\right).$$

従って, 多項式関数は有理関数の特別なものであるといえる. 一方で, 多項式関数ではない有理関数も実際に存在する. 例えば, 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ は, 定義 1.4 より, 明らかに有理関数ではあるが多項式関数ではない. この例も含めて "分母の次数が分子の次数よりも真に大きい" といえるような有理関数は, 一般に多項式関数ではないといえる.

(2) 多項式関数の定義域は, 一般に実数全体 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ である. 一方, 有理関数の定義域については, 分母と分子の多項式関数から共通の因子を約分した後, 残った分母が零点 (すなわち, その値が 0 となるような点) を持つような場合は, 実際に $\mathbb{R}$ よりも真に小さい集合が定義域となる (cf. (1.2)). 例えば, 有理関数 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4-1}$ に対しては,

$$f(x) = \frac{x+1}{x^4-1} = \frac{x+1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

であることから, その定義域は $x = 1$ 以外の全ての実数の集合 $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ であることがわかる.

補足. 上述の有理関数は, 以後の議論に登場する様々な関数の中で最も基本的なものである. 尚, 次回以降の講義でも詳しく紹介するが, 三角関数, 指数関数, 対数関数, $\cdots$ といった, 実際に有理関数としては表せないような関数 (**無理関数**) も考えられる.

[*2] 文献によっては, 多項式関数のことを **整式**, また, 有理関数のことを **分数式**や**分数関数**と呼ぶものもある.

[*3] これは多項式関数 $q(x)$ の値が恒等的に 0 ではないこと, すなわち, $\{\, x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\,\} \neq \phi$ であることを意味する.

1.2 グラフの平行移動

実際に与えられた関数 $f(x)$ $(x \in X \subset \mathbb{R})$ に対して, xy-座標平面におけるグラフ (cf. 定義 1.3) の形を調べる方法の一つとして, 例えば, 既知のグラフの形と比較してみることが第一に考えられる. その際に, 次の事実は有用である:

命題 1.6 (グラフの平行移動による方程式の変化)**.** $a, b \in \mathbb{R}$ を定数として, xy-座標平面における関数 $f(x)$ $(x \in X)$ のグラフを x-軸方向に a, y-軸方向に b だけ平行移動することで得られるグラフは, 次の方程式によって定まるものである:

$$y = f(x-a) + b \quad (x \in a + X)$$

(但し, 集合 $a + X$ は集合 X を x-軸上 a だけ平行移動したもの, すなわち, $a + X := \{\, x \in \mathbb{R} \mid x - a \in X \,\}$ とする).

証明. 上述の通りに平行移動して得られたグラフを, 逆に x-軸方向に "$-a$", y-軸方向に "$-b$" だけ平行移動すれば, 方程式 $y = f(x)$ $(x \in X)$ が定める元のグラフへと戻る. 一方, xy-座標平面において点 (x, y) を x-軸方向に $-a$, y-軸方向に $-b$ だけ平行移動することで得られる点の座標は $(x-a, y-b)$ である. 従って,

$$y - b = f(x-a) \iff y = f(x-a) + b \quad (\text{但し, } x - a \in X \iff x \in a + X \text{ とする})$$

が求める方程式であるといえる. □

例 1.7. (1) $a, b, c \in \mathbb{R}$ を定数とする. 1 次 (多項式) 関数 $f(x) = c\,x$ $(x \in \mathbb{R})$ のグラフは, xy-座標平面における原点を通る傾き c の直線であるが, このグラフを x-軸方向に a, y-軸方向に b だけ平行移動して得られる直線のグラフは, 命題 1.6 より, 次の方程式によって与えられるといえる:

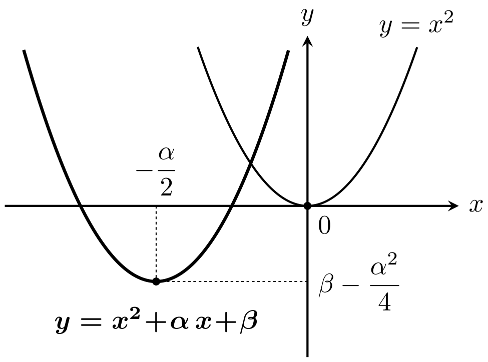
$$y = c\,(x-a) + b \iff y = c\,x + (b - a\,c) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

従って, この直線は $f(x) = c\,x$ のグラフを, y-軸方向に $(b - ac)$ だけ平行移動することで得られるものに等しい.

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を定数として, 2 次 (多項式) 関数 $f(x) = x^2 + \alpha\,x + \beta$ $(x \in \mathbb{R})$ について考えてみると, そのグラフは, xy-座標平面において方程式

$$y = x^2 + \alpha\,x + \beta = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

によって与えられるものである. 従って, 命題 1.6 より, これは図 1.2 で示した 2 次 (単項式) 関数 $f_2(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ のグラフ (放物線) を x-軸方向に $-\dfrac{\alpha}{2}$, y-軸方向に $\left(\beta - \dfrac{\alpha^2}{4}\right)$ だけ平行移動したものであることがわかる.



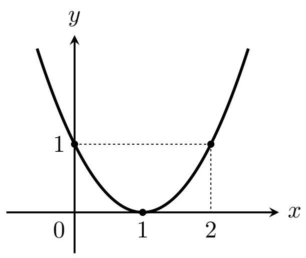
補足. 与えられた関数に対して, その微分を計算することができれば, 一般的にグラフの概形を求めることができる. 詳細は, 関数の微分 (あるいは, 導関数) について取り扱った後で述べる.

練習問題 1.1. 次の (多項式) 関数 $f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ に対して, そのグラフの概形を xy-座標平面上に図示せよ:

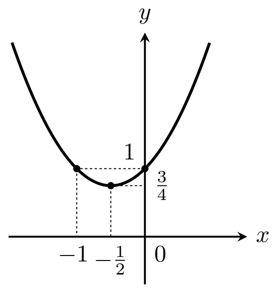
(1) $f(x) = x^2 - 2\,x + 1$ (2) $f(x) = x^2 + x + 1$ (3) $f(x) = x^3$

解答. 以下の通りである:

(1) $f(x) = x^2 - 2\,x + 1 = (x-1)^2$ より,



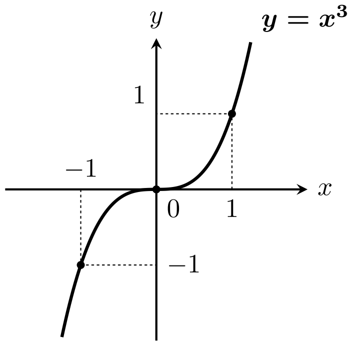
(2) $f(x) = x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ より,



(3) $f(x) = x^3$ に対して,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

であることに注意すれば, そのグラフが右のような原点を中心として (点) 対称な曲線であることがわかる.



□

練習問題 1.2. xy-座標平面上において, 3 次 (単項式) 関数 $f(x) = x^3$ のグラフ (cf. 練習問題 1.1 (3)) を x-軸方向に $(+)\,1$, y-軸方向に $(+)\,2$ だけ平行移動することで得られる曲線を定める方程式を求めよ.

解答. 命題 1.6 から, 上述の通りに平行移動することで, グラフを定める方程式は

$$y = x^3 \xrightarrow[\left(\ x\text{-軸方向}:+1,\ \ y\text{-軸方向}:+2\ \right)]{\text{平行移動}} y = (x-1)^3 + 2$$

のような形に変化することがわかる. ここで,

$$(x-1)^3 + 2 = (x-1)(x^2 - 2\,x + 1) + 2 = (x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1) + 2 = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x + 1$$

であるので, 問題の曲線を定める方程式は $\boldsymbol{y = x^3 - 3\,x^2 + 3\,x + 1}$ であるといえる. □

注意. 例 1.7 (2) でも述べたように, 2 次 (多項式) 関数

$$f(x) = x^2 + a\,x + b \quad (\text{但し, } a,\, b \in \mathbb{R} \text{ は定数とする})$$

のグラフは, どのような a, b を考えたとしても, 結局は同じ 2 次 (単項式) 関数 $f_2(x) = x^2$ のグラフ (放物線) を平行移動して得られるものであるといえるので, これらは全て同じ形である. しかし, 3 次 (多項式) 関数

$$f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c \quad (\text{但し, } a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \text{ は定数とする})$$

のグラフについては, 上述の練習問題 1.2 のように 3 次 (単項式) 関数 $f_3(x) = x^3$ のグラフを平行移動して得られる (すなわち, $f_3(x)$ のグラフと全く同じ形の) ものもあるのだが, その一方で, 例えば, $f(x) = x^3 - x$ のように $f_3(x)$ のグラフをどのように平行移動しても得られないようなグラフを持つものもあり, 全て同じ形であるという訳ではない. (実際, 上述のような 3 次 (多項式) 関数 $f(x)$ として, $a^2 \neq 3\,b$ であるようなものを考えれば, 一般に $f_3(x) = x^3$ とは異なる形のグラフが得られる.)

2021 年度 経済数学入門 I (第 3 & 4 回) 講義ノート[*1]

2 三角関数

まずはじめに "弧度法" について簡単に復習しておく: xy-座標平面における**単位円** (すなわち, 原点 $\mathrm{O} = (0, 0)$ を中心とする半径 1 の円[*2]) の上で, 図 2.1 のように基準点 $\mathrm{P}_0 = (1, 0)$ から反時計回りに弧長 θ だけ動くことで得られる点 $\mathrm{P}_{(+\theta)}$ のことを**弧度 $\boldsymbol{\theta}$** の点という. (同様に, 基準点 P_0 から時計回りに弧長 θ だけ動くことで得られる点 $\mathrm{P}_{(-\theta)}$ のことを**弧度 $-\boldsymbol{\theta}$** の点という.[*3]) このことを踏まえて, 点 P_0, O, $\mathrm{P}_{(+\theta)}$ を頂点とする扇形の中心角 $\angle \mathrm{P}_0\,\mathrm{O}\,\mathrm{P}_{(+\theta)}$ の大きさは, 頂点 $\mathrm{P}_{(+\theta)}$ の弧度 θ の (実) 数値に比例するものだといえるので, それを **"角度 $\boldsymbol{\theta}$"** であると表現することとする. これが, 一般に**弧度法**と呼ばれる角の計量法である[*4].

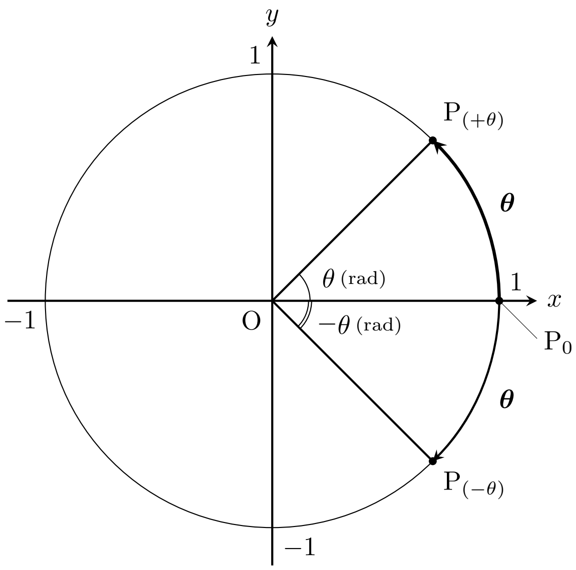


図 2.1 単位円周上の弧度 $\pm\theta$ $(\theta > 0)$ の点 $\mathrm{P}_{(\pm\theta)}$

尚, 円周率 π の定義[*5]から, 単位円の円周の長さは 2π に等しいといえる. このことから, 度数法による角度を弧度法によるものに変換すると, 例えば, 以下のようになる:

度数法	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$\cdots$	$360°$	$\cdots$
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$

(2.0)

注意. 任意の実数 θ $(\in \mathbb{R})$ に対して, 単位円の周上に弧度 θ の点が常に唯一つ定まる. 一方, 弧度法の基本原理から, 単位円周上における弧度 θ の点と弧度 $\theta + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ の点は常に同一のものであるといえる. すなわち, 同じ角度であっても, その弧度法による表し方は複数あるということになる.

練習問題 2.1. 度数法で $1°$ と表現される角度を, 弧度法を用いて, ある実数 θ (但し, $0 \leq \theta < 2\pi$) によって表せ.

解答. 上の (2.0) でも述べたように $180° = \pi$ (rad) であるので, $1° = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}$ $(= 0.01745\cdots)$ (rad) である. $\square$

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] あるいは, 方程式 $x^2 + y^2 = 1$ $(x, y \in \mathbb{R})$ によって定められる曲線といってもよい.

[*3] 尚, 基準点 $\mathrm{P}_0 = (1, 0)$ の弧度については, そこから全く動かないことを "弧長 0 だけ動いた" と考えて, とりあえず 0 と定めればよい.

[*4] 因みに, 弧度法による角度の単位は**ラジアン** (radian) であり, 省略して "角度 θ rad" と表くこともあるが, 単位記号 rad さえも省略して単に "角度 θ" と書くことの方が多い.

[*5] 一般に, 任意の (正) 円に対する円周と直径の長さの比率のことを**円周率** (circumference) といい, これをギリシャ文字 π によって表す.

定義 2.1 (正弦関数・余弦関数・正接関数)**.** 任意の実数 $\theta\,(\in\mathbb{R})$ に対して, xy-座標平面における単位円周上の弧度 θ の点を考え, その x-座標の値を $\cos\theta$, y-座標の値を $\sin\theta$ と定義する. 更に, $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の商として

$$\tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \left(\text{但し, } \cos\theta\neq 0 \Longleftrightarrow \theta\notin\left\{\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\,\pi}{2},\ \pm\frac{5\,\pi}{2},\cdots\right\}\text{とする}\right)$$

と定義する (cf. 図 2.2). このようにして定義される関数

$$f(x)=\sin x,\quad g(x)=\cos x \quad (x\in\mathbb{R}),\qquad h(x)=\tan x \quad \left(x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}\,\middle|\, n=0,1,2,\cdots\right\}\right) \tag{2.1}$$

のことを, それぞれ, **正弦** (sine) **関数**, **余弦** (cosine) **関数**, **正接** (tangent) **関数**という. これらを総称して**三角関数** (trigonometric functions) とも呼ぶ.

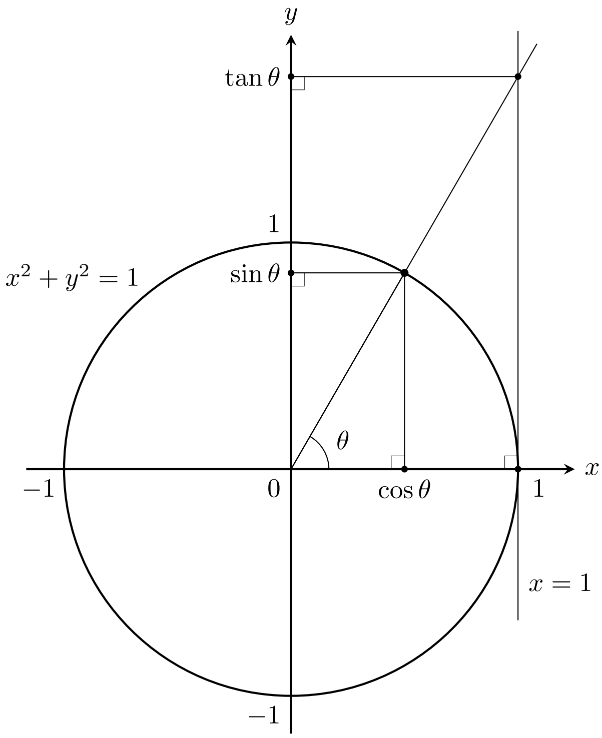


図 2.2　$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ $(0<\theta<\pi/2)$ の図解

注意 2.2. 定義 2.1 から, 正弦関数と余弦関数の値域は $[-1,1]=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\leq y\leq 1\}$, 正接関数の値域は $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ である (cf. 定義 0.2). また, これら三角関数に対しては, 一般に, 以下のような等式が成り立つ:

(0) **最も基本的な性質：**

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\quad\left(\because\ 1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

(1) **周期性：** $\sin(x\pm 2\,\pi)=\sin x$, $\cos(x\pm 2\,\pi)=\cos x$, $\tan(x\pm\pi)=\tan x$ (cf. 後述の定理 2.3 の補足).

(2) **関数としての偶奇性：** $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$.

(3) **その他：** $\sin\left(x\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\pm\cos x$, $\cos\left(x\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\mp\sin x$, $\tan\left(x\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan x}$ $\left(x\neq\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\,\pi}{2},\cdots\right)$.

定理 2.3 (**加法定理**)**.** 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ に対して, 一般に次の等式が成り立つ:

(i) $\boldsymbol{\sin(x_1+x_2)=\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}$, $\sin(x_1-x_2)=\sin x_1\cos x_2-\cos x_1\sin x_2$.

(ii) $\boldsymbol{\cos(x_1+x_2)=\cos x_1\cos x_2-\sin x_1\sin x_2}$, $\cos(x_1-x_2)=\cos x_1\cos x_2+\sin x_1\sin x_2$.

(iii) $\boldsymbol{\tan(x_1+x_2)=\dfrac{\tan x_1+\tan x_2}{1-\tan x_1\tan x_2}}$, $\tan(x_1-x_2)=\dfrac{\tan x_1-\tan x_2}{1+\tan x_1\tan x_2}$.

証明. 紙面の都合により, 詳しい説明は省略するが, 定義 2.1 をもとにして, まず, (i), (ii) の第 1 式が示される. また, これらの商を取ることで, (iii) の第 1 式も直ちに従う. 更に, 注意 2.2 (2) から, (i), (ii), (iii) の第 2 式も従う. □

補足. 三角関数の基本的性質 (cf. 注意 2.2) の大半は, 加法定理 (定理 2.3) によって説明できる. 例えば, 注意 2.2 (1) の第 3 式は, 定理 2.3 (iii) および $\tan\pi = 0$ であることから直ちに得られる:

$$\tan(x \pm \pi) = \frac{\tan x \pm \tan\pi}{1 \mp \tan x \tan\pi} = \frac{\tan x \pm 0}{1 \mp 0} = \tan x.$$

以上のこと (特に, 注意 2.2 (1), (2), (3)) から, xy-座標平面における三角関数のグラフは, 以下のような形であるといえる:

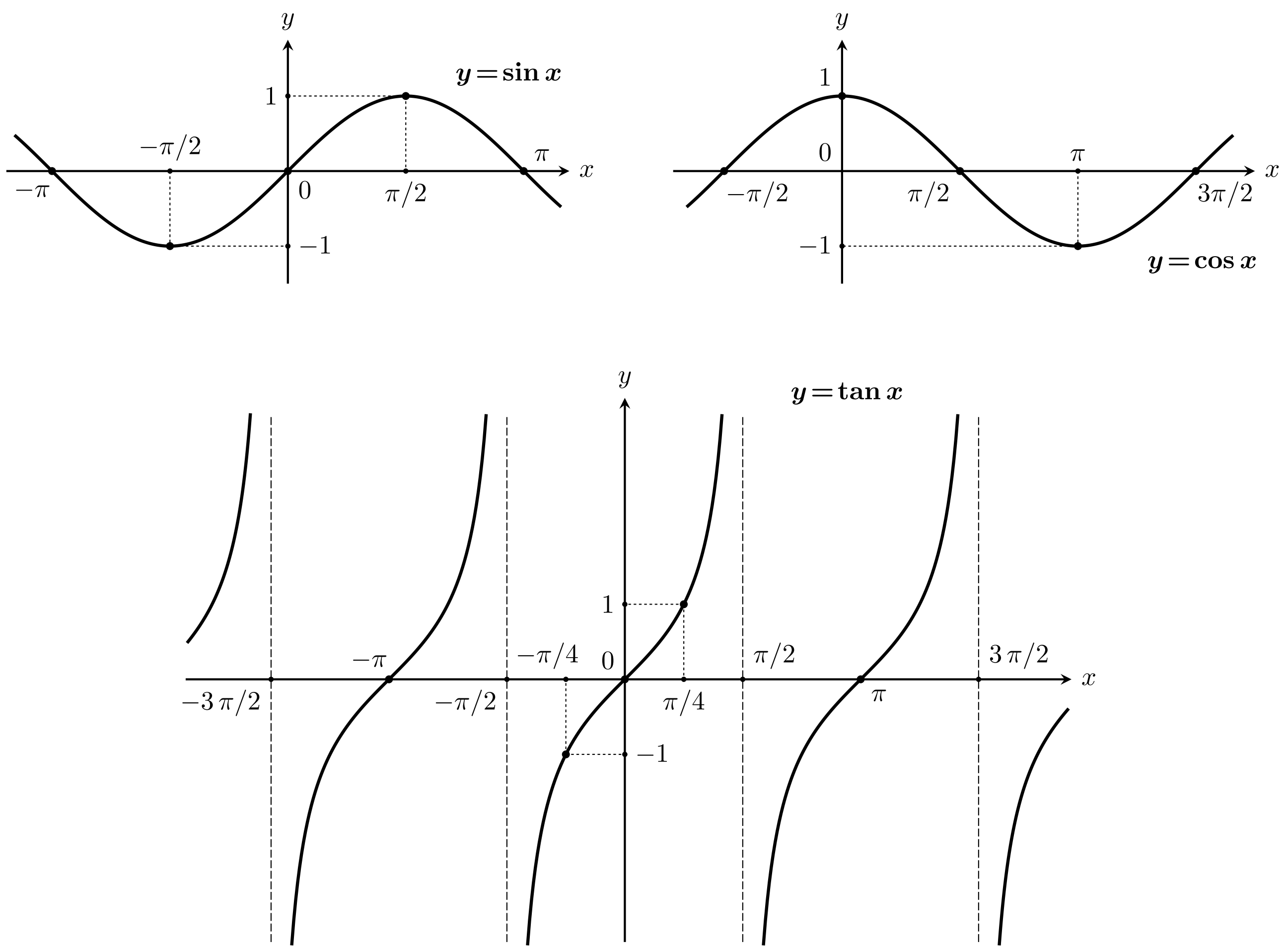


図 2.3 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ のグラフ

練習問題 2.2. 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の定義 (cf. 定義 2.1) や基本的性質 (cf. 注意 2.2) を用いて, 次の数表を完成させせよ:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0				-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$				0

解答. 以下の通りとなる:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	$\boldsymbol{-\sqrt{3}}$	$\boldsymbol{-1}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$	0

(実際, 定義 2.1 (あるいは, 図 2.2) の通りに, それぞれの数値を求めてもよいが, 例えば, $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ であることに注意して, 注意 2.2 (3) で紹介した等式に $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ を代入してみてもよい.) □

練習問題 2.3. 三角関数の加法定理 (定理 2.3) の特別な場合 ($x_1 = x_2 = x$) として得られる次の 3 つの等式は, 三角関数の **2 倍角公式**と呼ばれるものである:

$$\text{(i')}\ \sin(2x) = 2\sin x\cos x. \qquad \text{(ii')}\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x. \qquad \text{(iii')}\ \tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}. \tag{2.2}$$

これを踏まえて, 三角関数の**半角公式**と呼ばれる, 以下の 3 つの等式が成り立つことを確かめよ:

$$(1)\ \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2}. \qquad (2)\ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos x}{2}. \qquad (3)\ \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

解答. (1) 余弦関数の 2 倍角公式 (ii') および $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (cf. 注意 2.2 (0)) であることから,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Longleftrightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos(2x).$$

すなわち, $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ が成り立つ. これを $x \longmapsto \frac{x}{2}$ と変換して考えれば, 求める等式が得られる.

(2) 上の (1) と同様, 余弦関数の 2 倍角公式 (ii') および $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ であることから,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

すなわち, $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ が成り立つといえるので, これを $x \longmapsto \frac{x}{2}$ と変換して考えればよい.

(3) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (cf. 定義 2.1) であるので, (1), (2) より, $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$. □

補足. 上述の (2.2) を踏まえて, 更に加法定理を適用することで, 例えば,

$$\begin{aligned}
\sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\
&= 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\
&= 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos(2x + x) &= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\
&= \left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right)\cos x \\
&= \left\{\cos^2 x - 3\left(1-\cos^2 x\right)\right\}\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x,
\end{aligned}$$

$$\sin(4x) = \sin(2\times 2x) = \cdots = 4\sin x\cos^3 x - 4\sin^3 x\cos x,$$

$$\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = \cdots = \cos^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x + \sin^4 x, \quad \cdots\cdots$$

のような正弦・余弦関数の多倍角公式を導き出すこともできる[*6].

[*6] "n 倍角公式" にあたるものとして, 一般に **de Moivre の公式**と呼ばれる次のような等式も知られている: $\cos(nx) + \sqrt{-1}\sin(nx) = \left(\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right)^n$ (ここで, $\sqrt{-1}$ は虚数単位, すなわち, $\left\{\sqrt{-1}\right\}^2 = -1$ となるような二つの複素数のうちの一方とする).

3　指数関数

例えば, (有理) 数列 $(e_n)_{n=1}^{\infty} = (e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots)$ を $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \overbrace{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}^{n}$ $(n \geq 1)$ として与えられるものとすると, この数列 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ は, 自然数 n を限りなく大きくしていく $(n \to \infty)$ と, ある一定の (実) 数値 e に限りなく近づくといえる[*1]. すなわち,

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\,:\,\text{自然数})}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{3.1}$$

この実数 e $(\in \mathbb{R})$ は **Napier 数**, あるいは, **自然対数の底**と呼ばれるもので, 実際に無理数であることも知られている:

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772\cdots.$$

これを一般化して, 以下のような関数が考えられる:

定義 3.1 (指数関数)**.** 任意の実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して, 実数 e^x $(\in \mathbb{R})$ を次のように定義する[*2]:

$$e^x := \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\,:\,\text{自然数})}} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \tag{3.2}$$

このようにして定義される関数 $f(x) = e^x$ $(\,x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ を **指数関数** (exponential function) という.

注意 3.2. (1) 定義 3.1 から, $e^0 = 1$, $e^1 = e$ であることが直ちにわかる:

$$e^0 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1, \qquad e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{(3.1)}{=} e.$$

(2) 任意の実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdots (\star)$ となることが実際に証明できる. このことから,

$$e^{-x} \overset{(3.2)}{=} \lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{(-x)}{n}\right\}^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right\}^{-1} \overset{(\star)}{=} \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}^{-1} \overset{(3.2)}{=} (e^x)^{-1}.$$

すなわち, $e^{-x} = (e^x)^{-1} = \dfrac{1}{e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$ が一般に成り立つといえる. (ここで, 特に $e^{-1} = \dfrac{1}{e^1} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{e}$ であるといえる.)

補題 3.3. 任意の $x \in [0, \infty)$ (すなわち, $x \geq 0$ であるような実数 x) に対して, 不等式 $e^x \geq 1 + x$ が成り立つ.

証明. 任意の実数 $x \geq 0$ および 自然数 n (≥ 1) に対して, Pascal の二項定理[*3]から, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ が成り立つことがわかる. 従って, 数列の極限の単調性から, $x \geq 0$ ならば $e^x = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ が成り立つといえる. □

系 3.4 (**指数関数の正値性**)**.** 指数関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ の値域は, 開区間 $(0, \infty) = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \,\}$ (cf. 定義 0.2) である.

実際, (i) $x \geq 0$ の場合, 補題 3.3 により, $e^x \geq 1 + x \geq 1 > 0$ である. (ii) $x < 0$ の場合, $-x > 0$ であることから, (i) および 注意 3.2 (2) で示した事実により, $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}} > 0$. 従って, $e^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$ である. □

定理 3.5 (**指数法則**)**.** 任意の実数 x_1, x_2 $(\in \mathbb{R})$ に対して, 一般に次の等式が成り立つ:

$$\boldsymbol{e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \times e^{x_2}}, \qquad e^{x_1-x_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}. \tag{3.3}$$

[*1] この主張は "数列 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ の**極限** (limit) が値 e $(\in \mathbb{R})$ に収束する" とも表現される. これを省略して "$\displaystyle\lim_{n\to\infty} e_n = e$" と書き表す.

[*2] 厳密にいえば, 任意に与えられた実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して数列の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ が常にある一定の実数値に収束することが示されるので, その極限値を e^x と定める.

[*3] すなわち, 任意の実数 a, b に対して $(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \dfrac{n\,(n-1)}{2\times 1}\,a^{n-2}\,b^2 + \cdots + n\,a\,b^{n-1} + b^n \left(= \displaystyle\sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i\,a^{n-i}\,b^i\right)$ が成り立つこと.

証明. 紙面の都合により, 詳しい説明は省略するが, 定義 3.1 をもとにして, まず, (3.3) の第 1 式が示される. これにより, $e^{x_1-x_2}=e^{x_1+(-x_2)}=e^{x_1}\times(e^{-x_2})$ であるといえるので, (3.3) の第 2 式も直ちに従う (cf. 注意 3.2 (2)). □

系 3.6. 任意の実数 x ($\in\mathbb{R}$) および 自然数 $m,\,n\geq 2$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\text{(i)}\quad e^{mx}=(e^x)^m \quad (\text{特に, } e^m=\overbrace{e\times\cdots\times e}^{m} \text{ である}^{*4}). \qquad \text{(ii)}\quad e^{x/n}=\sqrt[n]{e^x}\quad (\text{i.e., } (e^{x/n})^n=e^x\,). \tag{3.4}$$

実際, (i) $mx=\overbrace{x+\cdots+x}^{m}$ と考えて, 指数法則 (定理 3.5) を繰り返し適用すれば得られる:

$$e^{mx}=e^{\{x+(m-1)x\}}=e^x\times e^{(m-1)x}=\cdots=\overbrace{e^x\times\cdots\times e^x}^{m}=(e^x)^m.$$

ここで, 特に $x=1$ の場合には, $e^1=e$ (cf. 注意 3.2 (1)) であるので, $e^m=\overbrace{e\times\cdots\times e}^{m}$ が成り立つといえる.
(ii) $n\,(x/n)=\overbrace{(x/n)+\cdots+(x/n)}^{n}=x$ であることに注意すれば, 上の (i) で示した事実から,

$$(e^{x/n})^n=\overbrace{e^{x/n}\times\cdots\times e^{x/n}}^{n}=e^{n\,(x/n)}=e^x.$$

従って, $e^{x/n}>0$ (cf. 系 3.4) より, $e^{x/n}=\sqrt[n]{e^x}$ であるといえる. □

定義 3.7 (関数の単調性[*5]). 次の主張が成り立つとき, 関数 $f(x)$ $(x\in X)$ は (**狭義**) **単調増加**であるという:

$$x_1<x_2\ (x_1,\,x_2\in X)\Longrightarrow f(x_1)<f(x_2). \tag{3.5}$$

同様に, 次の主張が成り立つとき, 関数 $f(x)$ $(x\in X)$ は (**狭義**) **単調減少**であるという:

$$x_1<x_2\ (x_1,\,x_2\in X)\Longrightarrow f(x_1)>f(x_2). \tag{3.5'}$$

系 3.8. 指数関数 $f(x)=e^x$ $(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ は (狭義) 単調増加である.

証明. $x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in\mathbb{R})$ ならば, $x_2-x_1>0$ である. 従って, 補題 3.3 より, $e^{x_2-x_1}\geq 1+(x_2-x_1)>1+0=1$. すなわち, $e^{x_2-x_1}>1$. 一方, 指数法則 (定理 3.5) より, $e^{x_2-x_1}=\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}$ である. 以上の議論から, $x_1<x_2$ ならば, $\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=e^{x_2-x_1}>1$ であるので, $e^{x_2}>e^{x_1}$ であるといえる. すなわち, $f(x)=e^x$ に対しては (3.5) が成り立つ. □

ここまでの議論をまとめると, xy-座標平面における指数関数 e^x $(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ のグラフの概形は, 以下のような形であるといえる (尚, 更に詳しい解説は, 指数関数の微分について取り扱った後に述べる):

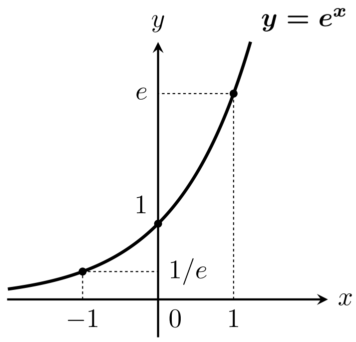


図 3.1　指数関数 e^x のグラフ

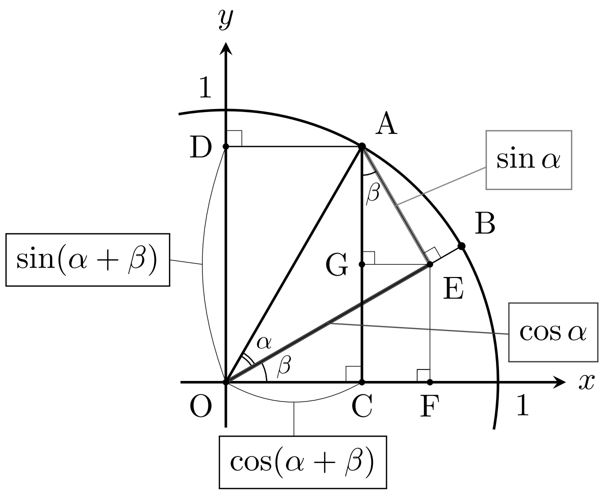
[*4] すなわち, 変数 x が自然数であるとき, e^x は Napier 数 e の "x 乗" に一致するといえる.
[*5] 厳密には, これは関数の **"狭義" 単調性**と一般に呼ばれるものである. 因みに, 次のような条件を満たす関数 $f(x)$ $(x\in X)$ は**広義単調増加** (resp. **広義単調減少**) であるといわれる: $x_1<x_2$ $(x_1,\,x_2\in X)\Longrightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ (resp. $f(x_1)\geq f(x_2)$).

2021 年度 経済数学入門 I (第 3 & 4 回) 補足資料[*1]

$\boxed{1}$ **正弦・余弦関数に対する加法定理の証明.** 三角関数の加法定理 (cf. 定理 2.3) の中で最も重要なことは, 任意の実数 α, β ($\in \mathbb{R}$) に対して, 以下のような等式が成り立つことである:

$$\text{(i)}\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta. \qquad \text{(ii)}\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta.$$

実際, これらの等式が一般に成立することは, 正弦・余弦関数の定義 (cf. 定義 2.1) から直ちにわかる. 例えば, $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$ の場合については, 以下の図を見てみるとよい:



直角三角形 △ OAC, △ OAE を考えれば, 定義 2.1 から,

$$|\mathrm{AC}| = |\mathrm{OD}| = \sin(\alpha+\beta), \quad |\mathrm{OC}| = \cos(\alpha+\beta),$$
$$|\mathrm{AE}| = \sin\alpha, \qquad |\mathrm{OE}| = \cos\alpha$$

であるといえる. また, $\angle\mathrm{EAC} = \angle\mathrm{EOC} = \beta$ であるということに注意すれば, 定義 2.1 から,

$$|\mathrm{AG}| = \sin\alpha\,\cos\beta, \quad |\mathrm{EF}| = \cos\alpha\,\sin\beta,$$
$$|\mathrm{OF}| = \cos\alpha\,\cos\beta, \quad |\mathrm{EG}| = \sin\alpha\,\sin\beta$$

であることもわかる. 従って,

$$|\mathrm{AC}| = |\mathrm{AG}| + |\mathrm{GC}| = |\mathrm{AG}| + |\mathrm{EF}|,$$
$$|\mathrm{OC}| = |\mathrm{OF}| - |\mathrm{FC}| = |\mathrm{OF}| - |\mathrm{EG}|$$

であることから, 上述の等式 (i), (ii) が得られる.

尚, 他の場合についても同様に (i), (ii) が成り立つことを, 簡単な図を用いて説明することができる. □

$\boxed{2}$ **指数関数 e^x が考えられるようになったきっかけ (の一つ) は経済学にある？** 例えば, ある金融機関の預金口座に一定額のお金 (元金) を 1 年間預けておけば, 元金の x 倍の金額が利息として得られると仮定する (但し, ここでの利率 x は適当な定数とする) :

$$A\ (\text{円}) \xrightarrow{1\text{ 年}} A + x\,A = (1+x)\,A\ (\text{円})$$

また, この契約では満期 1 年を迎える前に預金を全額引き落とした場合には, 預金期間の長さに (正) 比例して利率が変わることになっていたとしよう. このとき, 最初の入金から半年 ($= \dfrac{1}{2}$ 年) 経過した時点で, 一時的に預金 (全額) を引き出した後, そのお金 (全額) をまた同じ口座に再度入金して, そのまま半年間放置しておくと, 次のようになる:

$$A\ (\text{円}) \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{ 年}} A_1 = \left(1+\frac{x}{2}\right) A\ (\text{円}) \xrightarrow{\frac{1}{2}\text{ 年}} A_2 = \left(1+\frac{x}{2}\right) A_1 = \boldsymbol{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} A\ (\text{円})$$

これと同じことを, 更に細かく 1 年を n 等分して, $\dfrac{1}{n}$ 年ごとに預金の引き落とし・再入金を n 回繰り返したとすれば,

$$A\ (\text{円}) \xrightarrow{\frac{1}{n}\text{ 年}} A_1 = \left(1+\frac{x}{n}\right) A\ (\text{円}) \xrightarrow{\frac{1}{n}\text{ 年}} A_2\ \cdots\cdots\ A_{n-1} \xrightarrow{\frac{1}{n}\text{ 年}} A_n = \left(1+\frac{x}{n}\right) A_{n-1} = \boldsymbol{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} A\ (\text{円})$$

となる. 更に, 同様のことを, 満期 1 年を "限りなく" 細かく (等) 分割して考えれば, 最終的に元金 A (円) の $e^x = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 倍の金額が得られることになるといえる (cf. 定義 3.1). 尚, このような **"複利計算の限界"** に関する考察は, 18 世紀のオイラー[*2]の著作の中でも実際に紹介されており, これこそが, 指数関数 e^x が (定義 3.1 で述べたような形で) 初めて導入された動機の一つであるともいわれている.

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] Leonhard Euler (1707–1783 年) : 数学史上最も偉大な数学者の一人. 指数関数 e^x の導入も含め, 彼の遺した業績は非常に多い.

$\boxed{3}$ **指数関数 e^x に対する指数法則 (第 1 法則) の証明.** 指数法則 (cf. 定理 3.5) として紹介した等式

$$e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} \times e^{\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{$\heartsuit$}$$

が成立することは, 次の補題の主張に注意すれば, 指数関数 e^x の定義 (cf. 定義 3.1) から比較的簡単に証明できる[*3].

補題. 実数 A, B $(\in \mathbb{R})$ に対して,

$$A \geq B \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq A^{n+1} - A\,B^n \leq (n+1)\,(A-B)\,A^n \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{$*$}$$

証明. 任意の実数 A, B $(\in \mathbb{R})$ および自然数 n $(\in \mathbb{N})$ に対して,

$$A^{n+1} - B^{n+1} = (A-B)\,(A^n + A^{n-1}\,B + \cdots + A^{n-i}\,B^i + \cdots + A\,B^{n-1} + B^n)$$

であることから, 特に $A \geq B \geq 0$ ならば,

$$A^{n+1} - B^{n+1} \leq (A-B)\,(\overbrace{A^n + A^n + \cdots + A^n + \cdots + A^n + A^n}^{n+1}) = (n+1)\,(A-B)\,A^n.$$

更に, ここで $A^{n+1} - B^{n+1} \geq A^{n+1} - A\,B^n \geq \cdots \geq A^{n+1} - A^{n+1} = 0$ であるので, $(*)$ が成り立つといえる. □

■ **指数法則の証明.** 定義 3.1 から, 上述の $(\heartsuit)$ は, 任意の実数 α, β $(\in \mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n\right\}$$

が成り立つということに他ならない. これを示すために, まずは次のことに注意する:

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right) = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n} + \frac{\alpha}{n} \times \frac{\beta}{n} = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right) + \frac{\alpha\,\beta}{n^2}. \tag{$**$}$$

(1) $\alpha\,\beta \geq 0$ の場合には, 充分大きな自然数 n に対して $A = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)$, $B = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)$ とすれば, $(**)$ から $A \geq B \geq 0$ であるといえる. 従って, 上述の補題から,

$$0 \leq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha\,\beta}{n}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n.$$

すなわち,

$$0 \leq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n \leq \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\alpha\,\beta}{n} \times \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

であるといえる. 従って, はさみうちの原理により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n\right\} = 0$, すなわち, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n$ であるといえる.

(2) $\alpha\,\beta < 0$ の場合には, 充分大きな自然数 n に対して $A = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)$, $B = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)$ として, 同様に上述の補題を適用すれば,

$$0 \leq \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n \leq \boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(-\frac{\alpha\,\beta}{n}\right) \times \frac{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

となるので, はさみうちの原理により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n\right\}$ であるといえる. □

[*3] 但し, (後期の授業で取り扱う予定の) 数列の極限に関する基礎知識が必要となるので, 特に興味がなければ, 読み飛ばしてしまってもよい.

2021 年度 経済数学入門 I (第 5 & 6 回) 講義ノート[*1]

4 合成関数と逆関数

4.1 合成関数の概念

定義 4.1 (合成関数)**.** 二つの関数 $f(x)$ $(x \in X \subset \mathbb{R})$, $g(y)$ $(y \in Y \subset \mathbb{R})$ に対して, $f(X) \subset Y$ とする (cf. 定義 1.1). このとき, 次のようにして定義される関数 $(g \circ f)(x)$ $(x \in X)$ を f と g の**合成関数** (composite function) という:

$$(g \circ f)(x) := g\,(f(x)) \quad (x \in X).$$

注意. 定義 1.1 の補足で述べたように関数を ($\mathbb{R}$ の部分集合の間の) 写像と解釈すれば, 定義 4.1 で述べた合成関数は写像 $f : X \longrightarrow f(X)$, $x \longmapsto f(x)$ と写像 $g : Y \longrightarrow g(Y)$, $y \longmapsto g(y)$ を文字通り "合成" することで得られる写像

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} f(X)\,(\subset Y) \xrightarrow{g} g(f(X))\,(\subset g(Y)\,), \quad x \longmapsto y = f(x) \longmapsto z = g(y) = g(f(x))$$

に相当する関数に他ならないといえる (cf. 図 4.1). 従って, その値域は明らかに $(g \circ f)(X) = g(f(X))$ である.

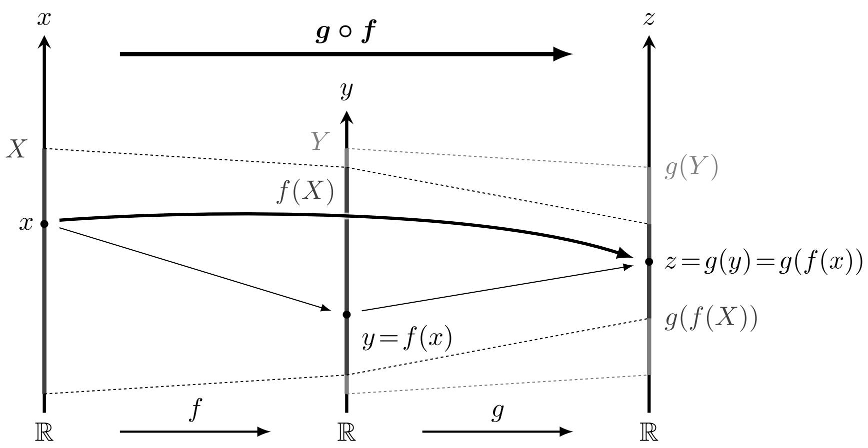


図 4.1　合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ のイメージ

例. 有理関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(\,x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,)$ と正弦関数 $g(x) = \sin x$ $(\,x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ に対して,

$$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\,x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,).$$

同様に, 任意に与えられた関数 $f(x)$ $(x \in X \subset \mathbb{R})$ に対して, 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ や指数関数 e^x との合成関数を考えることで, 変数 $x \in X$ に対して

$$y = \sin\,(f(x))\,, \qquad y = \cos\,(f(x))\,, \qquad y = \tan\,(f(x)) \ \ (\text{但し}, \cos\,(f(x)) \neq 0 \text{ とする}), \qquad y = e^{f(x)}$$

のような形の値 y を対応させる関数が定義できる. また, 順序を逆にして合成関数を考えれば, 適当な条件の下で $f(\sin x)$, $f(\cos x)$, $f(\tan x)$, $f(e^x)$ といったような形の (x を変数とする) 関数を考えることもできる.

練習問題 4.1. 次の関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して, 合成関数 $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ を求めよ:

$$(1)\ \ f(x) = \sin x, \quad g(x) = 1 - x^2 \qquad (2)\ \ f(x) = x^2, \quad g(x) = e^x$$

解答. (1) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ (cf. 注意 2.2 (0)), $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(1 - x^2)$.
(2) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{(x^2)}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{2x}$ (cf. 系 3.6 (i)). □

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

4.2 逆関数の概念

定義 4.2 (逆関数)**.** 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ は, **単射性** (injectivity) と一般に呼ばれる, 次の性質を持つものと仮定する[*2]:

$$x_1 \neq x_2 \ (x_1, x_2 \in X) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \left(\text{あるいは}, \ f(x_1) = f(x_2) \ (x_1, x_2 \in X) \underset{(\Longleftrightarrow)}{\Longrightarrow} x_1 = x_2\right). \tag{4.1}$$

このとき,

任意の $y \in f(X)$ (cf. 定義 1.1) に対して, 実際に $y = f(x)$ となるような $x \in X$ は常に "唯一つ" 存在する (4.1')

ということができる[*3]. 以上のことを踏まえて, 任意の $y \in f(X)$ に対して,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) := x \tag{4.2}$$

として定義される関数 $f^{-1}(y)$ $(\, y \in f(X)\,)$ を f の**逆関数** (inverse function) という.

注意. (1) 実際に単射性 (4.1) を持つような関数 f に対して, (4.2) で述べた逆関数 f^{-1} とは, 文字通り, f の値域 $f(X)$ から定義域 X へ "逆" の対応を与えるものであるといえる (cf. 図 4.2).

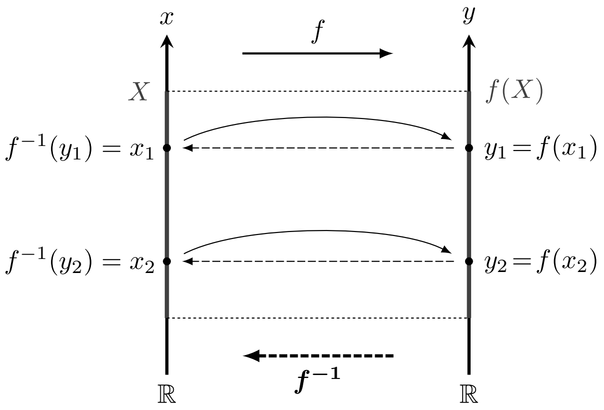


図 4.2 逆関数 $f^{-1}(y)$ $(\, y \in f(X)\,)$ のイメージ

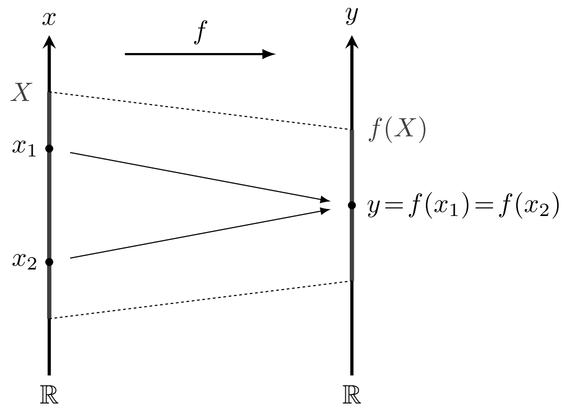


図 4.3 単射性を持たないような関数 f

尚, 単射性 (4.1) を持たないような関数 f に対しては, 主張 (4.1') が一般に成立しないため, 定義 1.1 から, 逆関数 f^{-1} は定義できない (cf. 図 4.3). すなわち, 関数 f が単射性 (4.1) を持つことは, 実際に (4.2) のような形で逆関数 f^{-1} が定義できるための必要充分条件なのである.

(2) 上述の (4.2) から, f と f^{-1} の合成関数 (cf. 定義 4.1) について, 次のような等式が成り立つことも明らかである:

$$\text{(i)} \ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \ \ (\, x \in X\,). \qquad \text{(ii)} \ \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\bigl(f^{-1}(y)\bigr) = y \ \ (\, y \in f(X)\,). \tag{4.3}$$

このことからもわかるように, 単射性 (4.1) を持つような関数 f に対しては, 一般に $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ であるといえる[*4].

例 4.3. (0) 定数関数 $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$ に対して, 一般に逆関数 f^{-1} を定義することはできない: 実際, x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ に対して, もし $x_1 \neq x_2$ であったとしても, 常に $f(x_1) = f(x_2) = c$ である. 従って, f は単射性 (4.1) を持たない[*5].

(1) 任意の定数 $c \neq 0$ に対して, 1 次 (多項式) 関数 $f(x) = c\,x$ $(x \in \mathbb{R})$ が単射性 (4.1) を持つことは明らかである[*6]. このとき, 逆関数は $f^{-1}(x) = c^{-1}\,x$ $(x \in \mathbb{R})$ である: 実際, 任意の $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ に対して,

$$y = f^{-1}(x) \overset{(4.2)}{\Longleftrightarrow} f(y) = x \Longleftrightarrow c\,y = x \underset{(c\,\neq\,0)}{\Longleftrightarrow} y = c^{-1}\,x.$$

[*2] 例えば, (狭義) 単調増加, あるいは, (狭義) 単調減少であるような関数は, 明らかに単射性 (4.1) を持つといえる (cf. 定義 3.7).

[*3] つまり, 任意の $y \in f(X)$ に対して, $y = f(x)$ となるような $x \in X$ を対応させることで, 新たに関数が定義できる (cf. 定義 1.1).

[*4] すなわち, "逆関数の逆関数" は元の関数に一致する.

[*5] ここで, どうしても逆関数を定義したければ, 後述の (2) のように定数関数の定義域を 1 点集合 $X = \{a\}$ $(\subset \mathbb{R})$ に制限して考えればよいが, そのようなものを, わざわざ関数として考える必要性は全くない.

[*6] 実際, $c \neq 0$ であれば, $c\,x_1 = c\,x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \overset{1/c\text{ 倍}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$. すなわち, その対偶を取れば, $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \Longrightarrow c\,x_1 \neq c\,x_2$.

(2) 2 次 (単項式) 関数 $f(x) = x^2$ に対して, 通常通り, その定義域を $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ と考えた場合には, 逆関数 f^{-1} は定義できない: 実際, $x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ ならば, $x \neq -x$ かつ $f(x) = f(-x) = x^2$ であるので (4.1) の主張は成立しない. そこで, 同じ関数 f の定義域を部分集合 $X = [0, \infty)$ $(\subset \mathbb{R})$ に制限して, $f(x) = x^2$ $(\, x \in X = [0, \infty) \,)$ と考えれば, これは明らかに (狭義) 単調増加であるので, 単射性 (4.1) を持つといえる. 従って, 逆関数 $f^{-1}(x)$ $(\, x \in f(X) = [0, \infty) \,)$ が定義できる. 例えば, $x = 2$ (≥ 0) に対して, $f^{-1}(2) = \sqrt{2}$ である:

$$y = f^{-1}(2) \overset{(4.2)}{\iff} f(y) = 2 \ \ (\text{但し}, \, y \in X = [0, \infty) \,) \iff y^2 = 2 \ \ (\text{但し}, \, y \geq 0 \,) \iff y = \sqrt{2}\,^{*7}.$$

より一般に, 非負の実数 $x \geq 0$ に対して,

$$y^2 = x \text{ かつ } y \geq 0 \text{ であるような (唯一つの) 実数 } y \text{ を “} y = \sqrt{x} \text{” と書き表す}$$

ということを思い出せば, $x = 2$ の場合と同様の議論により, 関数 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $(\, x \in [0, \infty) \,)$ が f の逆関数であるといえる:

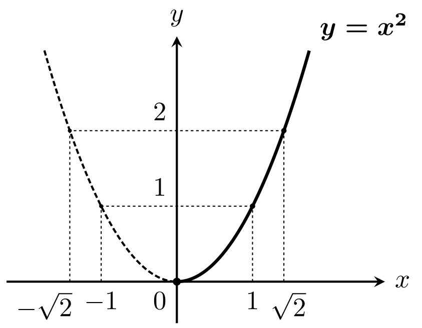


図 4.4　関数 $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ のグラフ

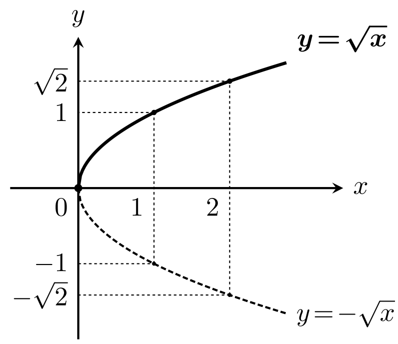


図 4.5　$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$ $(y \geq 0)$ のグラフ

注意 4.4. 上の図 4.4, 4.5 を比較してもわかるように, 関数 f に対して実際に逆関数 f^{-1} が定義可能であるとき,

xy-座標平面における f と f^{-1} のグラフは, 原点を通る傾き 1 の直線 $(y = x)$ を軸として互いに対称である.

実際, 定義 4.2 から, $y = f^{-1}(x)$ $(\, x \in f(X) \,) \overset{(4.2)}{\iff} f(y) = x$ $(\, y \in X \,)$. すなわち, xy-座標平面における逆関数 f^{-1} のグラフを定める方程式は, 元の関数 f のグラフを定める方程式 $y = f(x)$ $(x \in X)$ を “x と y の役割を入れ替えて” 考えたものに他ならないといえる (cf. 練習問題 0.2 (4)).

補足. 例 4.3 の (2) のように, 一般的には単射性 (4.1) を持たない関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対しても, 定義域 X を適当な部分集合に制限して考えることで, 逆関数が定義できる場合もある.

練習問題 4.2. 次の (有理) 関数 f に対して, その逆関数 f^{-1} を求め, そのグラフを xy-座標平面上に図示せよ:

$$(1) \ \ f(x) = 2\,x - 1 \ \ (x \in \mathbb{R}). \qquad (2) \ \ f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \ \ (\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \,).$$

解答.　紙面の都合により, グラフの図は省略する: (1) 任意の $x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ に対して,

$$y = f^{-1}(x) \overset{(4.2)}{\iff} f(y) = x \iff 2\,y - 1 = x \iff 2\,y = x + 1 \iff y = \frac{1}{2}\,(x + 1).$$

すなわち, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\,(x + 1)$ $(x \in \mathbb{R})$. 従って, f^{-1} のグラフは xy-座標平面における点 $(-1, 0)$ (あるいは, 点 $(0, 1/2)$) を通る傾き $1/2$ の直線であるといえる. (2) 任意の $x \in f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (すなわち, $x \neq 0$) に対して,

$$y = f^{-1}(x) \overset{(4.2)}{\iff} f(y) = x \iff y^{-1} = x \iff xy = 1 \iff y = x^{-1}.$$

すなわち, $f^{-1}(x) = x^{-1} = f(x)$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. 従って, f^{-1} のグラフは f のグラフ (双曲線) に等しいといえる.　□

---

*7 ここで, f の定義域を $[0, \infty)$ に制限することで得られた条件 $y \geq 0$ によって, $y = -\sqrt{2}\,(< 0)$ が除外されていることに注意せよ.

4.3 自然対数関数 ($=$ 底 e の対数関数)

既に系 3.8 でも示した通り, 指数関数 $e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ は (狭義) 単調増加であることから, 単射性 (4.1) を持つといえるので, その逆関数を (指数関数 e^x の値域である) 開区間 $(0,\infty)$ の上に定義できる (cf. 定義 4.2):

定義 4.5 (自然対数関数; 底 e の対数関数)**.** 指数関数 $f(x)=e^x$ $(\, x \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)\,)$ の逆関数を

$$f^{-1}(y) = \log y \quad (\, y \in f(\mathbb{R}) = (0,\infty)\,) \tag{4.4}$$

と書き表す. すなわち, 任意の実数 $y>0$ (i.e., $y \in (0,\infty)$) に対して, 実数 $\log y$ $(\in \mathbb{R})$ を以下のように定義する:

$$y = e^x \Longleftrightarrow \log y := x. \tag{4.4'}$$

このようにして定義される関数 $g(x)=\log x$ $(\, x\in(0,\infty)\,)$ を**自然対数関数** (*natural* logarithmic function) という[*8]. 尚, この自然対数関数のことを, e^x に由来するものであることを強調して, **“底 e の” 対数関数** (logarithmic function of base e) といい, $\log x = \log_e x$ と書くこともある.

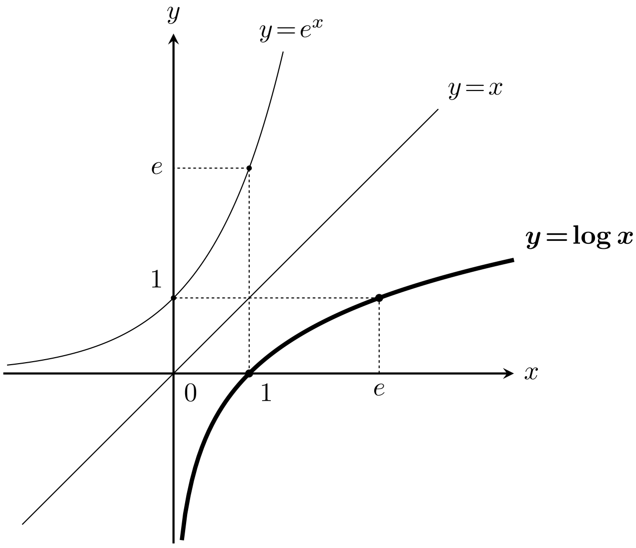


図 4.6 自然対数関数 $\log x\,(=\log_e x)$ のグラフ (cf. 図 3.1)

注意 4.6. $e^0=1$, $e^1=e$ (cf. 注意 3.2 (1)) および 定義 4.5 から, $\log 1 = 0$, $\log e = 1$ であることが直ちにわかる:

$$y=\log 1 \overset{(4.4')}{\Longleftrightarrow} e^y = 1 \Longleftrightarrow y=0, \qquad y = \log e \overset{(4.4')}{\Longleftrightarrow} e^y = e \Longleftrightarrow y = 1.$$

また, (4.4') (あるいは, (4.3)) から, 次のような等式が一般に成り立つといえる:

$$\text{(i)}\quad \log(e^x) = x \;\;(\, x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,). \qquad \text{(ii)}\quad e^{\log y} = y \;\;(\, y \in (0,\infty)\,). \tag{4.5}$$

補足 (**単項式関数の一般化**)**.** (4.5) の (ii) から, 任意の実数 $x>0$ に対して $x = e^{\log x}$ となる. このことに着目して, 任意の実数 $a\,(\in\mathbb{R})$ に対して, 例 1.2 で紹介した単項式 (関数) の自然な一般化ともいえる関数

$$x^a := e^{a\log x}\left(= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\,:\,\text{自然数})}}\left(1+\frac{a\log x}{n}\right)^n\right) \quad (\, x\in(0,\infty)\,) \tag{4.6}$$

を定義することができる[*9]. 実際, $a=0$ の場合は $e^{0\,\log x} = e^0 = 1$ であるので $x^0=1$ $(\, x \in (0,\infty)\,)$. また, $a=m$ $(m=1,2,\cdots)$ の場合には, 系 3.6 (i) より, $e^{m\log x} = (e^{\log x})^m = x^m$ $(\, x\in(0,\infty)\,)$. 更に, $a=-m$ $(m=1,2,\cdots)$ の場合にも, 指数法則 (定理 3.5) から, $e^{-m\log x} = \dfrac{1}{e^{m\log x}} = \dfrac{1}{(e^{\log x})^m} = \dfrac{1}{x^m} = x^{-m}$ $(\, x\in(0,\infty)\,)$ となる.

[*8] この “自然対数” という名称のフランス語版 “logarithme naturel” を縮約して, $\log x = \ln x$ と表記する文献もある.

[*9] つまり, これは $f(x) = a\,\log x$ $(\, x\in(0,\infty)\,)$ と $g(y)=e^y$ $(y \in \mathbb{R})$ の合成関数 $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ に他ならない (cf. 定義 4.1).

定理 4.7 (**自然対数法則**). 任意の実数 $y_1,\, y_2,\, x > 0$ に対して, 一般に次のような等式が成り立つ:

$$\log(y_1\,y_2) = \log y_1 + \log y_2, \qquad \log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log y_1 - \log y_2, \qquad \log(x^a) = a\,\log x \quad (a \in \mathbb{R}). \tag{4.7}$$

証明. 任意の $y_1,\, y_2 > 0$ に対して, $\log y_1 = x_1,\, \log y_2 = x_2$ とおくと, 自然対数関数の定義 (4.4') (あるいは, (4.5) の (ii)) から, $y_1 = e^{x_1},\, y_2 = e^{x_2}$ であるといえる. 従って, 指数法則 (定理 3.5) の第 1 式により,

$$y_1\,y_2 = e^{x_1} \times e^{x_2} = e^{x_1+x_2} \overset{(4.4')}{\iff} \log(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \log y_1 + \log y_2.$$

すなわち, (4.7) の第 1 式が成り立つ. 同様に, 指数法則 (定理 3.5) の第 2 式から, (4.7) の第 2 式も直ちに従う:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2} \overset{(4.4')}{\iff} \log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1 - x_2 = \log y_1 - \log y_2.$$

また, (4.5) の (i) と (4.6) から, 任意の $x > 0$ に対して $\log(x^a) = \log\left(e^{a\log x}\right) = a\,\log x$ であるといえる. □

命題 4.8. 自然対数関数 $f(x) = \log x$ ($x \in (0,\infty)$) は (狭義) 単調増加である: すなわち, 実数 $x_1,\, x_2 > 0$ に対して,

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow \log x_1 < \log x_2 \text{ (cf. 定義 3.7).}$$

証明. これは, 指数関数 e^x の (狭義) 単調増加性 (cf. 系 3.8) と自然対数関数の定義 (4.4') からも明らかである. □

練習問題 4.3. 一般に, 任意の実数 $x > 0$ に対して "$\sqrt{x} = x^{1/2}$" と書くことが妥当である理由を, 指数関数 e^x ($x \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$) と自然対数関数 $\log x = \log_e x$ ($x \in (0,\infty)$) の性質を用いて説明せよ.

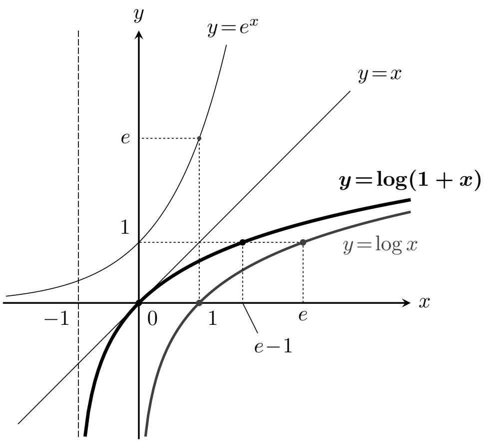
解答. 実際, 注意 4.6 の補足でも述べたように, 任意の $x \in (0,\infty)$ に対して $x^{1/2} := e^{(1/2)\log x}$ と定義される (cf. (4.6)). このことを踏まえて考えれば, 指数法則 (cf. 定理 3.5 or 系 3.6) および (4.5) の (ii) により,

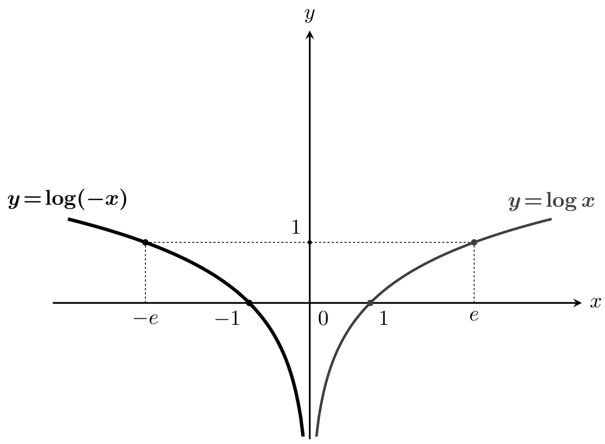
$$\left(x^{1/2}\right)^2 = \left(e^{(1/2)\log x}\right)^2 = \left(e^{(1/2)\log x}\right) \times \left(e^{(1/2)\log x}\right) = e^{(1/2)\log x + (1/2)\log x} = e^{\log x} = x.$$

また, 指数関数の正値性 (cf. 系 3.4) から, $x^{1/2} = e^{(1/2)\log x} > 0$. すなわち, 任意の $x > 0$ に対して $y = x^{1/2}$ とおくと, $y^2 = x$ かつ $y > 0$ である. 従って, 一般に $x^{1/2} = \sqrt{x}$ ($x \in (0,\infty)$) であるといえる (cf. 例 4.3 (2)). □

練習問題 4.4. 関数 $f(x) = \log(1+x)$ ($x \in (-1,\infty)$), $g(x) = \log(-x)$ ($x \in (-\infty,0)$) のグラフを xy-座標平面上に図示せよ.

解答. $f(x) = \log(1+x)$ ($x \in (-1,\infty)$) のグラフは, 命題 1.6 により, 自然対数関数のグラフを x-軸方向に (-1) だけ平行移動したものであるといえる. 一方, $g(x) = \log(-x)$ ($x \in (-\infty,0)$) のグラフは, 自然対数関数のグラフを y-軸を軸として対称移動したものである.





□

5　一般的な指数関数・対数関数

(4.6) と同様, 任意の実数 $b>0$ に対して $e^{\log b}=b$ となることに着目すれば, 次のような関数も自然に定義される:

定義 5.1 (**指数関数の一般化**)**.** 任意の実数 $b>0$ に対して,

$$b^x := e^{x\log b} \left(= \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\,:\,\text{自然数})}} \left(1+\frac{x\log b}{n}\right)^n \right) \quad (\, x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,) \tag{5.1}$$

と定義する[*1]. 特に, $b=e$ (Napier 数) の場合, $\log e=1$ (cf. 注意 4.6) であるので, (5.1) は定義 3.1 で定義した指数関数 e^x に他ならない. また, $b=1$ の場合は, $\log 1=0$ より, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して $1^x \overset{(5.1)}{=} e^{x\log 1}=e^0=1$ である.

注意. 実際に, $x=0$ の場合は $b^0 \overset{(5.1)}{=} e^{0\log b}=e^0=1$. また, $x=m$ $(m=1,2,3\cdots)$ の場合は, 系 3.6 (i) から, $b^m \overset{(5.1)}{=} e^{m\log b}=\overbrace{e^{\log b}\times\cdots\times e^{\log b}}^{m}=\overbrace{b\times\cdots\times b}^{m}$. 同様に, 系 3.6 (ii) から, $b^{1/n} \overset{(5.1)}{=} e^{(1/n)\log b}=\sqrt[n]{e^{\log b}}=\sqrt[n]{b}$.

また, 任意の実数 x $(\in\mathbb{R})$ に対して, $y=b^x$ とおくと,

$$\log y=\log\left(b^x\right) \overset{(5.1)}{=} \log\left(e^{x\log b}\right) \overset{(4.5\text{-i})}{=} x\,\log b.$$

ここで, もし $b\neq 1$ であれば, $\log b\neq 0$ より, $x=\dfrac{\log y}{\log b}$ であるといえる. すなわち, $b\neq 1$ の場合には, 関数 $f(x)=b^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ $(\,x\in f(\mathbb{R})=(0,\infty)\,)$ として, 次のようなものを考えることができる[*2]:

定義 5.2 (**底 b の対数関数**)**.** 実数 $b>0$ (但し, $b\neq 1$ とする) に対して,

$$\log_b x := \frac{\log x}{\log b} \quad (\, x\in(0,\infty)\,) \tag{5.2}$$

と定義する. このようにして定義される関数を **"底 b の" 対数関数** (logarithmic function of base b) という. 特に, $b=e$ (Napier 数) の場合は $\log_e x \overset{(5.2)}{=} \dfrac{\log x}{\log e}=\dfrac{\log x}{1}=\log x$ である (cf. 定義 4.5).

注意 5.3. 上述の通り, $0<b\neq 1$ (すなわち, $0<b<1$ または $b>1$) ならば, 任意の実数 x $(\in\mathbb{R})$, $y>0$ に対して,

$$y=b^x \Longleftrightarrow x=\log_b y. \tag{5.2'}$$

すなわち, 次の等式が一般に成り立つ:

$$\text{(i)}\quad \log_b(b^x)=x \ \ (\, x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,). \qquad \text{(ii)}\quad b^{\log_b y}=y \ \ (\, y\in(0,\infty)\,). \tag{5.3}$$

また, 定理 3.5, 系 3.8, 定理 4.7 & 命題 4.8 から, 以下のような主張が一般的に成立することも簡単にわかる:

(1) **指数法則・対数法則：** $b^{x_1+x_2}=b^{x_1}\times b^{x_2},\ \ b^{x_1-x_2}=\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}}\ \ (\,x_1,\,x_2\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$.

$$\log_b(y_1\,y_2)=\log_b y_1+\log_b y_2, \quad \log_b\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=\log_b y_1-\log_b y_2 \quad (\,y_1,y_2\in(0,\infty)\,).$$

$$\log_b(x^a)=a\,\log_b x \ \ (\,x\in(0,\infty),\ a\in\mathbb{R}\,).$$

(2) **指数・対数関数の単調性** (cf. 定義 3.7)**：** $b>1$ (すなわち, $\log b>0$) の場合,

$$x_1<x_2 \ \Longrightarrow b^{x_1}<b^{x_2}. \qquad 0<y_1<y_2 \Longrightarrow \log_b y_1<\log_b y_2.$$

一方, $0<b<1$ (すなわち, $\log b<0$) の場合は,

$$x_1<x_2 \ \Longrightarrow b^{x_1}>b^{x_2}. \qquad 0<y_1<y_2 \Longrightarrow \log_b y_1>\log_b y_2.$$

[*1] すなわち, これは 1 次 (多項式) 関数 $f(x)=x\,\log b$ と指数関数 $g(x)=e^x$ の合成関数 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ に他ならない (cf. 定義 4.1).
[*2] 尚, $b=1$ の場合は, $f(x)=1^x=1$ (定数関数) であるので, その逆関数 $f^{-1}(x)$ は定義できない (cf. 例 4.3 (0)).

尚, $0 < b \neq 1$ のときの指数関数 $f(x) = b^x \left(:= e^{x \log b}\right)$ と対数関数 $f^{-1}(x) = \log_b x \left(:= \dfrac{\log x}{\log b}\right)$ のグラフは, 以下のような形である:

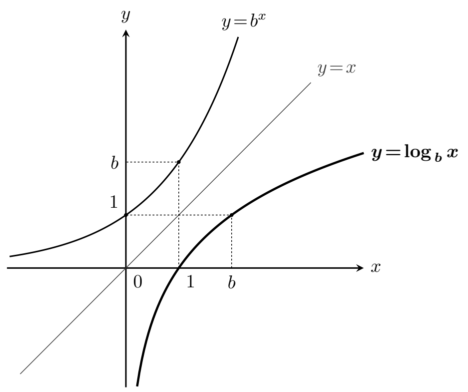


図 5.1 $b > 1$ の場合

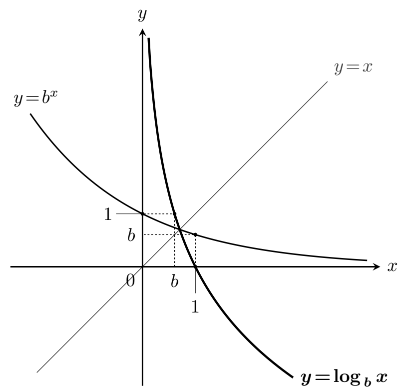


図 5.2 $0 < b < 1$ の場合

練習問題 5. 一般的な対数関数の定義 5.2 や注意 5.3 の主張を踏まえて, 以下の数値を求めよ:

$$(1)\quad \log_2 \sqrt[3]{128} \qquad (2)\quad \log_3\left(\frac{243}{27}\right) \qquad (3)\quad \log_{\sqrt{e}}(e^2) + \log_{e^2}\sqrt{e} \quad (\text{但し, } e \text{ は Napier 数とする})$$

解答. (1) $128 = 2^7$ であることから, $\sqrt[3]{128} = 2^{7/3}$. 従って, 底 2 の対数法則 (cf. 注意 5.3 (1)) により,

$$\log_2 \sqrt[3]{128} = \log_2\left(2^{7/3}\right) = \frac{7}{3}\log_2 2 \overset{(5.3\text{-i})}{=} \frac{7}{3} \times 1 = \frac{7}{3}.$$

(別解) 底 2 の対数を, 定義 5.2 のように自然対数 (i.e., 底 e の対数) に戻して, (自然) 対数法則を用いてもよい:

$$\log_2 \sqrt[3]{128} \overset{(5.2)}{=} \frac{\log \sqrt[3]{128}}{\log 2} = \frac{\log(2^{7/3})}{\log 2} = \frac{(7/3)\log 2}{\log 2} = \frac{7}{3}.$$

(2) $243/27 = 3^5/3^3 = 3^{5-3} = 3^2$ であることから, 底 3 の対数法則 (cf. 注意 5.3 (1)) により,

$$\log_3\left(\frac{243}{27}\right) = \log_3(3^2) = 2\log_3 3 \overset{(5.3\text{-i})}{=} 2 \times 1 = 2.$$

(別解 1) $\log_3\left(\dfrac{243}{27}\right) = \log_3 243 - \log_3 27 = \log_3(3^5) - \log_3(3^3) = 5\log_3 3 - 3\log_3 3 = 2\log_3 3 \overset{(5.3\text{-i})}{=} 2.$

(別解 2) 前問 (1) の別解と同様, 底 3 の対数を, 定義 5.2 のように自然対数に戻して考えてもよい:

$$\log_3\left(\frac{243}{27}\right) \overset{(5.2)}{=} \frac{\log(243/27)}{\log 3} = \frac{\log(3^5/3^3)}{\log 3} = \frac{\log(3^2)}{\log 3} = \frac{2\log 3}{\log 3} = 2.$$

(3) 議論の対象である二つの対数を, 定義 5.2 のような自然対数に変換すると,

$$\log_{\sqrt{e}}(e^2) + \log_{e^2}\sqrt{e} \overset{(5.2)}{=} \frac{\log(e^2)}{\log\sqrt{e}} + \frac{\log\sqrt{e}}{\log(e^2)} = \frac{\log(e^2)}{\log(e^{1/2})} + \frac{\log(e^{1/2})}{\log(e^2)}.$$

従って, (自然) 対数法則により,

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{e}}(e^2) + \log_{e^2}\sqrt{e} &= \frac{\log(e^2)}{\log(e^{1/2})} + \frac{\log(e^{1/2})}{\log(e^2)} \\ &= \frac{2\log e}{(1/2)\log e} + \frac{(1/2)\log e}{2\log e} \\ &= 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.\end{aligned}$$

(上の (3) のように複数異なる底の対数が混在したものを取り扱う場合には, はじめに全ての対数を共通の底 (例えば, Napier 数 e) のものへと変換してから考えることが望ましい.) □

【付録】微分積分学において一般的に取り扱われる関数 (初等関数) の概念

定義 5.4 (初等関数)**.** 有理関数 (cf. 定義 1.4), 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ (cf. 定義 2.1), 指数関数 e^x (cf. 定義 3.1) に対して, 次の 3 種類の操作を有限回組み合わせて施すことで得られるような関数のことを, 一般に**初等関数** (elementary function) といい, 次回以降に取り扱う "極限" や "微分・積分" の議論を適用する主な対象として考える:

(0) **関数の四則演算 :** 二つの関数 $f(x)$ $(x \in X_1)$, $g(x)$ $(x \in X_2)$ に対して, 集合 X_1 と X_2 の共通部分を $X_1 \cap X_2$ $(:= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in X_1$ かつ $x \in X_2 \,\}) \neq \phi$ とする. このとき,

(i) 関数 f, g の**和**, **差**, **積**と呼ばれる関数 $(f \pm g)(x)$, $(f\,g)(x)$ を以下のように定義する:

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x), \quad (f\,g)(x) := f(x)\,g(x)^{*3} \quad (x \in X_1 \cap X_2).$$

(ii) $g(X_1 \cap X_2) \neq \{0\}$ であるとき, 関数 f, g の**商**と呼ばれる関数 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ を次のように定義する:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\, x \in \{\, x \in X_1 \cap X_2 \mid g(x) \neq 0 \,\}).$$

(1) **合成操作** (cf. 定義 4.1)**:** 二つの関数 $f(x)$ $(x \in X)$, $g(y)$ $(y \in Y)$ に対して, $f(X) \subset Y$ であるとき, f と g の**合成関数** (composite function) と呼ばれる関数 $(g \circ f)(x)$ を次のように定義する:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in X).$$

(2) **逆操作** (cf. 定義 4.2)**:** 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$x_1 \neq x_2 \ (x_1, x_2 \in X) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \left(\text{対偶: } f(x_1) = f(x_2) \ (x_1, x_2 \in X) \underset{(\Longleftrightarrow)}{\Longrightarrow} x_1 = x_2\right)$$

が成り立つとき,

任意の $y \in f(X)$ に対して, 実際に $y = f(x)$ となるような $x \in X$ は常に "唯一つ" 存在する

ということができるので, 任意の $y \in f(X)$ に対して,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) := x \, (\in X)$$

と定義する. このような関数 $f^{-1}(y)$ $(\, y \in f(X)\,)$ を f の**逆関数** (inverse function) という.

注意. 上述の定義 5.4 からもわかるように,

定数関数, 単項式関数 x^m $(m = 0, 1, 2, \cdots)$, 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$, 正接関数 $\tan x$, 指数関数 e^x

は, これからの議論で登場する様々な初等関数の中でも特に基本的なものである. また, 指数関数 e^x の逆関数である自然対数関数 $\log x \, (= \log_e x)$, 更に, それをもとにして一般的に定義される以下の関数もまた重要な初等関数である:

$$x^a := e^{a \log x} \ (\, x \in (0, \infty)\,), \quad b^x := e^{x \log b} \ (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,), \quad \log_b x := \frac{\log x}{\log b} \ (\, x \in (0, \infty)\,)$$

(但し, ここでの定数 a は任意の実数, また, 定数 b は $0 < b \neq 1$ であるような実数とする).

補足. 本来ならば, ここで, "三角関数の逆関数" として定義される初等関数

$$\arcsin x, \ \arccos x \ (\, x \in [-1, 1]\,), \quad \arctan x \ (\, x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$$

(すなわち, **逆三角関数** (*inverse* trigonometric functions) と一般に呼ばれるもの) についても紹介したいところではあるが, ここでは詳しく述べないことにする.

---

*3 特に, 定数関数との積として, 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ の実 (定) 数倍が定義される: $(c\,f)(x) := c\,f(x)$ $(x \in X)$.

2021 年度 経済数学入門 I (第 7 回) 講義ノート[*1]

6 関数の極限

6.1 極限の概念

定義 6.1 (関数の極限)**.** ある開区間 $X \subset \mathbb{R}$ (cf. 定義 0.2) を定義域とする関数 $f(x)$ $(x \in X)$ と $a \in \mathbb{R}$[*2]に対して,

$$\text{“}\underline{\text{変数 } x \in X\,(\subset \mathbb{R}) \text{ を任意に動かして } a \text{ に限りなく近づけた}}\text{とき,}$$
$$\text{関数 } f(x) \text{ の値は常にある一定の実数 } \alpha\,(\in \mathbb{R}) \text{ に限りなく近づく”} \tag{6.1}$$

といえることを, “$\underline{x \to a}$ のときの関数 $f(x)$ の**極限** (limit) **は** α **に収束する**” といい, これを

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \left(\text{厳密には,} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ (x \in X)}} f(x) = \alpha \right) \quad \text{あるいは,} \quad f(x) \longrightarrow \alpha \ (x \to a)$$

と書き表す. また, 関数 $f(x)$ に対して (6.1) のような実数 α が存在しないとき, “$x \to a$ のときの関数 $f(x)$ の極限は**発散する**” という. 同様に, 変数 $x\,(\in X)$ を<u>限りなく大きくする</u>ことを<u>$(+)\infty$ に近づける</u>, また, <u>限りなく小さくする</u>ことを<u>$-\infty$ に近づける</u>として, 極限 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ の収束・発散を議論することもできる.

注意 6.2. (i) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha\,(\in \mathbb{R})$ であるということは, $\lim_{x \to a} |f(x) - \alpha| = 0$ であることと言い換えてもよい. これは, 数学的にもう少し厳密な形で,

$$\text{“変数 } x \in X \text{ を } a \text{ の充分近くに取れば, 絶対値 } |f(x) - \alpha|\ (\geq 0) \text{ は幾らでも } 0 \text{ に近い値が取れる”} \tag{6.1'}$$

と解釈することもできる. この (6.1') を更に厳密な形で表現したものが **ε-δ 論法**[*3]を用いた関数の極限の定義である.
(ii) 極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が発散するということは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \text{ となるような実数 } \alpha\,(\in \mathbb{R}) \text{ が唯一つに定まらない}$$

ことを意味する. このような状況の一例として,

$$x \to a \text{ のとき, } f(x) \text{ の値が限りなく大きく・小さくなる (i.e., } \boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty} \text{)}$$

という場合が挙げられるが, その他にも関数の極限が発散する場合として,

$$\text{“変数 } x\,(\in X) \text{ を } a \text{ に近づける方法の取り方によっては, 関数 } f(x) \text{ の値の近づく先が異なる”} \tag{6.2}$$

ような場合も考えられる[*4]. 例えば, 右極限や左極限と呼ばれる概念を

$$\lim_{x \to a+0} f(x) := \lim_{\substack{x \to a, \\ x > a}} f(x) \quad \cdots \boxed{\textbf{右極限}}, \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) := \lim_{\substack{x \to a, \\ x < a}} f(x) \quad \cdots \boxed{\textbf{左極限}}$$

として導入すれば,

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ が収束する} \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) \tag{6.3}$$

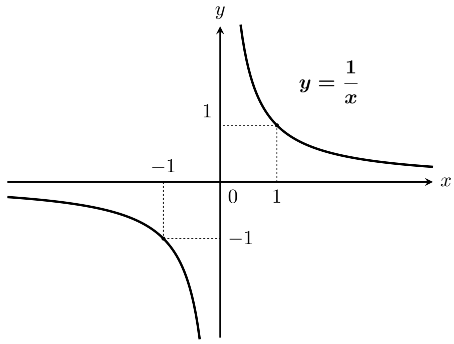
である. 従って, その対偶として, 上述の (6.2) のような意味で極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が発散するための充分条件が得られる:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) \text{ は発散する.} \tag{6.3'}$$

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur<at>alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.
[*2] ここでは, 仮に $a \notin X$ であってもよい. また, 後述の通りに (6.1) の前半 (下線) 部分を修正すれば $a = \pm\infty\ (\notin \mathbb{R})$ として考えてもよい.
[*3] ここでの実数 $\varepsilon\,(> 0)$ は絶対値 $|f(x) - \alpha|$ の尺度, 実数 $\delta\,(> 0)$ は絶対値 $|x - a|$ の尺度を表す記号である. 本講義では, これ以上深くへは立ち入らないことにするが, ε-δ 論法の詳細について興味があれば『**解析入門 I**』(**杉浦光夫著, 東大出版会**) 等を開いてみるとよい.
[*4] このような場合には, $x \to a$ のときに $f(x)$ の極限と呼ぶべきものが複数存在して, 一つには定まらないことになる.

補足 (数列の極限)**.** ある関数 $f(x)$ ($x \in (0,\infty)$) に対して, その $x = 1,2,3,\cdots$ (自然数) での値のみを考えたものは数列 $(f(n))_{n=1}^{\infty} = (f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots)$ となる．従って, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha \ (\in \mathbb{R}) \underset{(\not\Leftarrow)}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n\,:\,\text{自然数})}} f(n) = \alpha$.

例 6.3. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ に対して,



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{収束}).$$

また,

$$\lim_{x\to0+0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to0-0} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{発散}).$$

従って, (6.3') より, $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{x}$ は (6.2) の意味で発散するといえる.

例 6.4. (1) 関数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ に対して, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ であることから, $\lim_{x\to0+0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to0-0} f(x) = -1$. すなわち, $\lim_{x\to0+0} f(x) \neq \lim_{x\to0-0} f(x)$ であるので, 極限 $\lim_{x\to0} f(x)$ は発散する (cf. (6.3')).

(2) 関数 $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$ に対して, 明らかに $f(x) = f(-x)$ $(x \neq 0)$ が成り立つことから, $\lim_{x\to0+0} f(x) = \lim_{x\to0-0} f(x)$ であるといえるのだが, 実は, 極限 $\lim_{x\to0} f(x)$ は (上述の (6.2) の意味で) 発散する．これは, 例えば,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, \quad b_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(4n+1)\pi}} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

として定まる (実) 数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ を考えると, 明らかに $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるが, 一方で

$$① \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2n\pi) = \sin 0 = 0, \quad ② \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

従って, 変数 $x\,(\neq 0)$ を① $x = a_n \to 0\,(+0)$ $(n \to \infty)$ と動かした場合と② $x = b_n \to 0\,(+0)$ $(n \to \infty)$ と動かした場合とで関数 $f(x)$ の値が全く異なる値に近づくといえるので, 実際に (6.1) は成立しない[*5]．この例からもわかるように (6.3') の逆の主張は一般に成立しない.

練習問題 6.1. 次の関数の極限を求めよ:　(1) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$　(2) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\,)$　(3) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

解答. (1) 任意の実数 $x \neq 1$ に対して, $\dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$ であることから, $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1) = 1+1+1 = 3$ である.

(2) 任意の $x > 0$ に対して, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ より,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\,) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(1/x)}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ (**2 倍角公式**), $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ (**3 倍角公式**) より,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{3 - 4\sin^2 x}{2\cos x} = \frac{3-0}{-2} = -\frac{3}{2}. \qquad \square$$

注意 6.5. 上の練習問題 6.1 の解答からもわかるように, 関数の極限を計算する上で重要なことは, 変数 x に極限操作を施す "前" に, 議論の対象である関数を適切に計算して簡約化しておくことであるといえる.

[*5] これと同様の議論から, $\lim_{x\to0-0} \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ や $\lim_{x\to0+0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ が発散していることもわかる.

6.2　極限計算の基本原理

定理 6.6. 関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in X \subset \mathbb{R})$ および $a \in \mathbb{R}$ (あるいは, $a = \pm\infty$ でもよい) に対して,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta \ \ (\text{但し, } \boxed{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \text{ とする}) \tag{6.4}$$

であるとき, 以下のような主張が成り立つ:

(1) **四則演算と極限操作の可換性：** 関数 f, g の四則演算の極限は, f と g それぞれの極限の四則演算に等しい[*6]:

(i) $\displaystyle \lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta \left(= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)\right)$.

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to a}\{f(x)\, g(x)\} = \alpha\,\beta \left(= \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)\right)$. 特に, $\displaystyle \lim_{x\to a}\{\, c\, f(x)\} = c\ \alpha \left(= c \lim_{x\to a} f(x)\right)$.

(iii) $\displaystyle \beta \neq 0 \left(\text{i.e., } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$ のとき, $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \left(= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\right)$.

(2) **極限の (広義) 単調性：** $\displaystyle f(x) \leq g(x)\ (x \in X) \Longrightarrow \alpha \leq \beta \ \left(\text{i.e., } \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)\right)$[*7].

証明. ε-δ 論法 (cf. 注意 6.2 (i)) を用いて極限を厳密に定義すれば, 全てを厳密に証明することもできるが, ここでは省略する. (**※本講義では, これらのことは事実として認めて構わない.**) □

定理 6.7 (はさみうちの原理). 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ $(x \in X)$ および $a \in \mathbb{R}$ (あるいは, $a = \pm\infty$) に対して,

$$\text{(i)}\ \ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ \ (x \in X), \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha \quad (\text{但し, } \alpha \in \mathbb{R} \text{ とする})$$

であるならば, $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ である.

証明. 定理 6.6 (2) から, $\displaystyle \alpha = \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$. すなわち, $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ である. □

命題 6.8 (有名な極限公式[*8]). (1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (2)[*9] $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

証明. 以下の通り, どちらも (少し技巧的な形で) はさみうちの原理 (定理 6.7) を用いれば, 実際に示すことができる:

(1) $0 < x < \pi/2$ として, 単位円周上の弧度 x の点を頂点とする扇形の面積を, その内と外から三角形の面積によって評価することで,

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} \underset{\times 2}{\Longrightarrow} \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{\times 1/\sin x}{\Longrightarrow} 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

すなわち, $\displaystyle \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ が成り立つといえる. 従って, $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} \cos x = 1$ であるので, はさみうちの原理 (定理 6.7) により, $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が得られる. 更に, このことから, $\displaystyle \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0-0 \\ (-x\to 0+0)}} \frac{\sin(-x)}{(-x)} = 1$ であるといえる.

(2) 任意の実数 $x > 0$ に対して $\displaystyle \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log(1+1/x)}$ (cf. (4.6)) と定義されることに注意すれば, 特に, $x > 1$ に対して, x の整数部分を n $(= [\,x\,])$ とおくと, $n \leq x < n+1$ より, 指数関数 e^x の (狭義) 単調増加性 (cf. 系 3.8) から

$$\underline{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \underline{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1}}.$$

[*6] すなわち, (6.4) のように極限 $\displaystyle \lim_{x\to a} f(x)$, $\displaystyle \lim_{x\to a} g(x)$ が共に収束する場合は, 関数 $f(x)$, $g(x)$ の四則演算を取る操作と, $x \to a$ の極限操作は順序交換が可能である (i.e., 可換である) といえる.

[*7] ここで, たとえ $f(x) < g(x)$ $(x \in X)$ であったとしても, $\alpha = \beta$ となる場合もあることに注意せよ: 例えば, 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $\displaystyle \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ であるが, $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ である.

[*8] これら二つの極限式は, 以下の証明の議論を読んで理解 (納得) できたら, その後は, **公式として覚えておくだけでもよい**.

[*9] これは, Napier 数 e の定義 (cf. (3.1)) の一般化というべきものである.

また, 自然対数関数 $\log x$ の (狭義) 単調増加性 (cf. 命題 4.8) から,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \underline{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}, \qquad \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

であることがわかる. 従って,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (\, x \in (1,\infty)\,).$$

ここで, $x \to \infty$ とすると, $n\ (=[\,x\,]\,) \to \infty$ であるが, Napier 数 e の定義 (cf. (3.1)) から,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (n+1\to\infty)}}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\,(1+0)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\,(1+0) = e.$$

従って, はさみうちの原理 (定理 6.7) により, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ であるといえる. 更に, このことから, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ も得られる: 実際, $x<0$ に対して, $y=-x\ (>0)$ とおくことで,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{\substack{y\to\infty \\ (y-1\to\infty)}}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\,(1+0) = e. \quad \square\end{aligned}$$

練習問題 6.2. 命題 6.8 の極限公式を踏まえて, 以下の関数の極限を求めよ.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} \qquad\qquad (2)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \qquad\qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

解答. (1) 任意の $x\neq 0$ に対して, $y=2x$ とおくと, $x\to 0$ ならば $y\to 0$ である. 従って, 定理 6.6 (1-ii) より,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\,x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin(2x)}{2\,x} = \lim_{y\to 0}\frac{2\,\sin y}{y} = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2\times 1 = 2 \quad (\because\ \text{命題 6.8 (1)}\,).$$

(別解) 正弦関数の 2 倍角公式 $\sin(2x)\ (=\sin(x+x)\,) = 2\sin x\cos x$ を用いて,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cos x = 2\times 1\times 1 = 2$$

としてもよい (cf. 定理 6.6 (1-ii), 命題 6.8 (1)).

(2) 任意の $x\neq 0$ に対して, $y=1/x$ とおくと, $x\to 0\pm 0$ ならば $y\to\pm\infty$ である (cf. 例 6.3). 従って,

$$\lim_{x\to 0\pm 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e \quad (\because\ \text{命題 6.8 (2)}\,).$$

(3) 前問 (1) と同様に, 定理 6.6 (1-ii), および, 命題 6.8 (1) より,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\,(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\times\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

2021 年度 経済数学入門 I (第 8 回) 講義ノート[*1]

7 関数の連続性

定義 7.1 (関数の連続性)**.** (開) 区間 $X\,(\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty))$ を定義域に含むような関数 $f(x)$ と "$a \in X$" に対して,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{7.1}$$

が成り立つとき, $f(x)$ は **"$x = a$ において" 連続** (continuous) であるという. 更に, 任意の $a \in X$ に対して $f(x)$ が $x = a$ において連続であるとき, $f(x)$ は **"X において" 連続**であるという[*2]. 尚, このように (開) 区間 X 上のすべての点において連続であるような関数 $f(x)$ のことを, X の上に定義された**連続関数**ともいう.

注意 7.2. (1) 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ が $x = a\,(\in X)$ において連続であるということは,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\Bigl(\lim_{x \to a} x\Bigr) \tag{7.1'}$$

が成り立つこと, すなわち, 変数 $x\,(\in X)$ に対して $x \to a$ の極限を取る操作と, 関数 $f(x)$ の値を取る操作は, 順序を交換しても結果が変わらないことと言い換えてもよい.

(2) 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ の $x = a\,(\in X)$ における連続性 (7.1) は, xy-座標平面上において

f のグラフ (i.e., 方程式 $y = f(x)$ $(x \in X)$ によって定まる曲線) が, 点 $(a, f(a))$ の近くでは "繋がっている"

ことであると直感的に解釈してもよい.

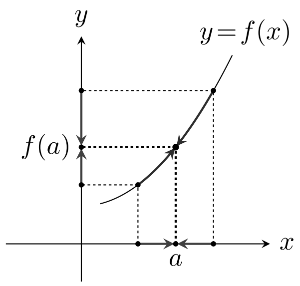


図 7.1　関数 $f(x)$ の $x = a$ における連続性

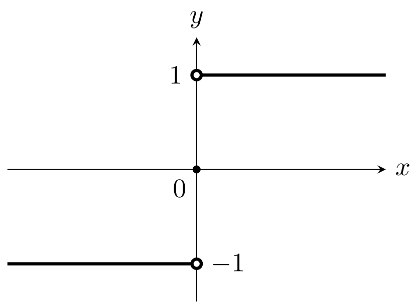


図 7.2　$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (但し, $f(0) = 0$ とする) の $x = 0$ での不連続性

補題 7.3. 関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in X)$ が $x = a$ $(\in X)$ において連続であるとする. このとき,

(i) 関数 $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$, $(f\,g)(x) := f(x)g(x)$ は $x = a$ $(\in X)$ において連続である.

(ii) $g(a) \neq 0$ のとき, 関数 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x = a$ $(\in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\})$ において連続である.

証明. これらは, 定理 6.6 (1) の主張から直ちに従う. □

補題 7.4. 関数 $f(x)$ $(x \in X)$, $g(y)$ $(y \in Y)$ に対して $f(X) \subset Y$ とする. このとき, $f(x)$ が $x = a$ $(\in X)$ において連続であり, また, $g(y)$ が $y = f(a)$ $(\in Y)$ において連続であるならば, 合成関数 $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ は $x = a$ $(\in X)$ において連続である.

証明. 仮定から, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f\Bigl(\lim_{x \to a} x\Bigr) = f(a)$, $\displaystyle\lim_{y \to f(a)} g(y) = g\Bigl(\lim_{y \to f(a)} y\Bigr) = g(f(a))$ であるので, 特に,

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{\substack{y = f(x) \to f(a) \\ (x \to a)}} g(y) = g\Bigl(\lim_{x \to a} f(x)\Bigr) = g(f(a)). \tag{7.2}$$

従って, 定義 7.1 より, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ は $x = a$ において連続である. □

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] このような場合, 関数 $f(x)$ は (X において) **"各点" 連続**であるということもある.

注意. 補題 7.4 の証明で得られた (7.2) から, 合成関数の極限 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ に対して, 関数 $g(y)$ ($y \in f(X) \subset Y$) が連続である場合, 一般に次のような主張が成立することがわかる:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big). \tag{7.2'}$$

従って, この場合には, もし $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha\ (\in Y)$ ならば, 極限 $\lim_{x\to a} g(f(x))$ の値は $g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) = g(\alpha)$ に等しいといってもよい[*3]. このように, **特定の関数の連続性に着目して考えれば, 様々な関数の極限の値を求める際, 極限操作 ($x \to a$) を施すタイミングを適当に変更して, 筋道良く計算することが可能である**.

例 7.5. 自然対数関数 $\log x$ ($x \in (0,\infty)$) は, グラフの形から明らかに定義域 (のすべての点) において連続である (cf. 図 4.6 & 注意 7.2 (2)). このことから, 極限公式 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ (cf. 練習問題 6.2 (2)) に対して, **その両辺の自然対数関数の値を取る** $(*)$ ことで, 極限公式

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \tag{7.3}$$

が得られる (実際, 自然対数法則 (cf. 定理 4.7) が成り立つことに注意すれば,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log\left((1+x)^{1/x}\right) \overset{(7.2')}{=} \log\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) \overset{(*)}{=} \log e = 1$$

であるといえる).

尚, **連続関数の四則演算・合成関数・逆関数として得られる関数もまた, 一般に連続関数である**といえる. すなわち,

定理 7.6. *(1) 連続関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in X)$ に対して, それらの四則演算として得られる関数*

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad (f\,g)(x) = f(x)g(x) \ \ (x \in X), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ (x \in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\})$$

は, いづれも連続関数である.

(2) 連続関数 $f(x)$ $(x \in X)$, $g(y)$ $(y \in Y)$ (但し, $f(X) \subset Y$) に対して, 合成関数 $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ $(x \in X)$ は連続関数である.

(3) (単射性を持つような) 連続関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して, その逆関数 $f^{-1}(y)$ $(y \in f(X))$ は連続関数である.

証明. (1), (2) 補題 7.3 & 7.4 から直ちに従う. (3) 例えば, ある (開) 区間 I において定義された連続関数 $f(x)$ $(x \in I)$ が単射性を持つための必要充分条件は, それが (狭義) 単調増加, あるいは, (狭義) 単調減少のどちらかであることだといえる[*4]. これら 2 つの場合に分けて考えることで, 逆関数 $g(y) = f^{-1}(y)$ ($y \in f(I)$) の連続性を背理法によって示すことができる. □

定理 7.7 (初等関数の連続性). *初等関数は, その定義域 (のすべての点) において連続である.*

証明. 有理関数, 三角関数, 指数関数が定義域全体において連続であることは, 定義 (あるいは, グラフの形) から容易にわかる. 従って, これらの連続関数に対して四則演算や合成関数, 逆関数を取る操作を有限回施すことで与えられる初等関数 (cf. 定義 5.4) は, 定理 7.6 から, その定義域において連続であるといえる. (特に, 指数関数の逆関数である自然対数関数は, 定理 7.6 (3) からも, その定義域において連続であることがわかる.) □

また, 一般に連続関数が持つ基本的な性質として, 以下の 2 つのものが挙げられる:

定理 7.8 (中間値定理). *(有界な) 閉区間 $[a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$ $(\subset \mathbb{R})$ において定義された連続関数 $f(x)$ ($x \in [a,b]$) に対して, $f(a) < f(b)$ と仮定する[*5]. このとき, 任意の実数 $d \in [f(a), f(b)]$ に対して, $f(c) = d$ となるような $c \in [a,b]$ が必ず存在する. すなわち,*

$$f(a) \leq d \leq f(b) \Longrightarrow f(c) = d \text{ かつ } a \leq c \leq b \text{ であるような実数 } c \text{ が (少なくとも一つは) 存在する.}$$

[*3] すなわち, 極限式 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ に対して, その両辺の連続関数 $g(y)$ の値を取れば, 極限 $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\alpha)$ の値が求められる.

[*4] これは, 後述する連続関数の中間値定理と最大・最小値原理 (cf. 定理 7.8 & 7.9) からの自然な帰結である.

[*5] 尚, $f(a) > f(b)$ である場合にも, 以下の主張における $f(a)$ と $f(b)$ の役割を入れ替えることで, 同様のことがいえる.

定理 7.9 (最大・最小値原理[*6]). (有界な) 閉区間 $[a,b] := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$ $(\subset \mathbb{R})$ において定義された連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ には, 必ず最大値と最小値が存在する．すなわち,

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad (x \in [a,b])$$

となるような $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ が (それぞれ, 少なくとも一つは) 存在する．

定理 7.8 & 7.9 の証明. 紙面の都合により, 省略する (どちらの主張も直感的には明らかであるといえるだろう). □

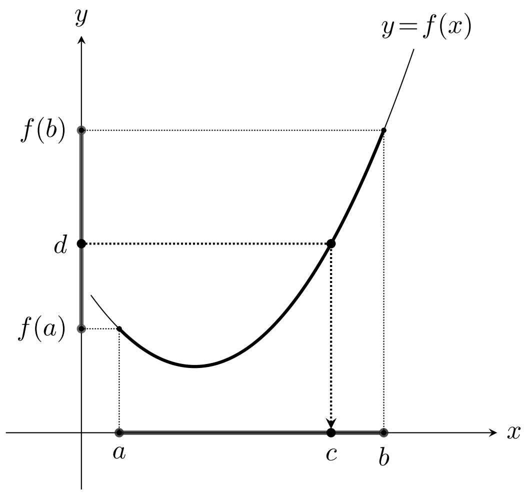


図 7.3　連続関数の中間値定理 (定理 7.8)

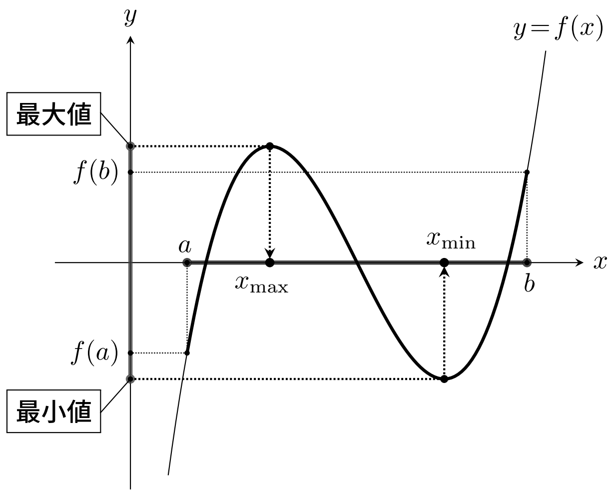


図 7.4　連続関数の最大・最小値原理 (定理 7.9)

注意 7.10. 上述の定理 7.8 & 7.9 の主張は, 連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ に対して, $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の値 (中間値) や最大値・最小値を与えるような実数 $x \in [a,b]$ の “存在” を保証するものであるが, そのような x $(\in [a,b])$ が具体的にどのようなものであるかについては, 詳しく言及していない.

練習問題 7. 例 7.5 で (7.3) として示した極限式 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ を用いて, 次の極限式が成り立つことを示せ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{7.4}$$

解答. 任意の実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して, $y = e^x - 1$ とおくと, $y \longrightarrow 0$ $(x \to 0)$. また, $1 + y = e^x$ であることから, $\log(1+y) = x$ である．従って, 上述の極限式 (7.3) より,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

注意. 練習問題 6.2 (2), 例 7.5 & 練習問題 7 で実際に得られたことをまとめると, 以下のようになる:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \ (\text{cf. 命題 6.8 (2)}) \overset{\boxed{1}}{\Longleftrightarrow} \lim_{y \to 0} (1+y)^{1/y} = e \overset{\boxed{2}}{\Longrightarrow} \lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1 \overset{\boxed{3}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\left(\boxed{1} \cdots\ y = \frac{1}{x} \text{ とおく．} \quad \boxed{2} \cdots\ \log x \text{ の連続性と (自然) 対数法則を用いる．} \quad \boxed{3} \cdots\ y = e^x - 1 \text{ とおく．} \right)$$

こうしてみると, 命題 6.8 (2) で紹介した極限公式 (=Napier 数 e の定義式 (3.1) の自然な一般化) の形を正しく記憶してさえいれば, 練習問題 6.2 (2), 例 7.5 & 練習問題 7 の極限式は, どれも上述のように比較的簡単に導き出されるものといえる．従って, これら 3 つの極限式を公式として記憶する必要はないともいえるが, **計算時間の短縮のためにも** (可能であれば) **覚えておくとよい**.

[*6] 証明者の名前を冠して, **Bolzano - Weierstrass の定理**とも呼ばれる.

8　関数の微分

定義 8.1 (関数の微分可能性)**.** (開) 区間 $X\,(\subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty))$ を定義域に含むような関数 $f(x)$ $(x \in X)$ および $a \in X$ に対して, $f(x)$ が **“$\boldsymbol{x = a}$ において” 微分可能** (differentiable) であるとは, 次のような実数 $\alpha\,(\in \mathbb{R})$ が存在することである:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha. \tag{8.1}$$

このような α のことを, $f(x)$ の $x = a$ における**微分係数** (differential coefficient; derivative) といい, これを

$$f'(a) = \alpha \quad \cdots \boxed{\textbf{Lagrange の記法}}, \quad \text{あるいは}, \quad \frac{df}{dx}(a) \left(= \left(\frac{d}{dx} f \right)(a) \right) = \alpha \quad \cdots \boxed{\textbf{Leibniz の記法}}$$

のように書き表す. 更に, $f(x)$ が (開) 区間 X 上のすべての点において微分可能であるとき, $f(x)$ は **“X において” 微分可能**であるといい, このとき, X の各点における ($f(x)$ の) 微分係数を対応させる関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (x \in X) \tag{8.2}$$

のことを, 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ の**導関数** (derivative function), あるいは, 単に**微分** (derivative) という[*1].

注意 8.2. (8.1) が成り立つということは, xy-座標平面における曲線 $y = f(x)$ $(x \in X)$ が点 $(a, f(a))$ で直線

$$y - f(a) = \alpha\,(x - a) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{8.1'}$$

と接していることと同義である. 従って, 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ の $x = a$ $(\in X)$ における微分係数 $f'(a)$ とは, 曲線 $y = f(x)$ $(x \in X)$ が点 $(a, f(a))$ において唯一つ持つ**接線の傾き**に他ならない.

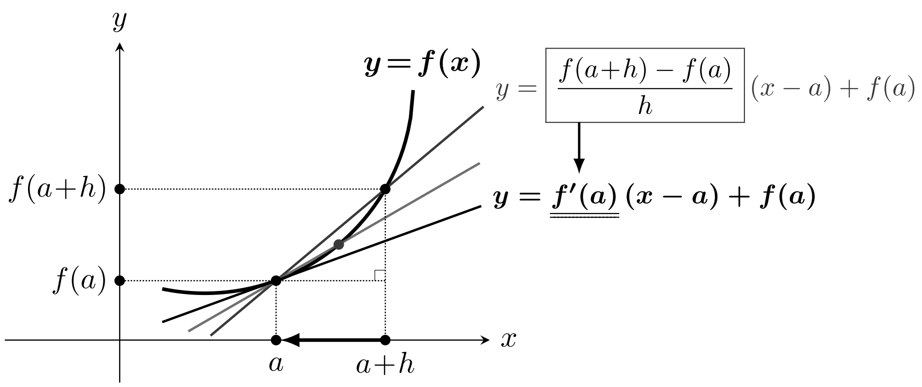


図 8.1　曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線と微分係数 $f'(a) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

命題 8.3. 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ が $x = a\,(\in X)$ において微分可能ならば, $f(x)$ は $x = a$ において連続である.

証明. $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるならば, (8.1) より, $x \in X$ $(x \neq a)$ に対して,

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \times |x - a| \longrightarrow |f'(a)| \times 0 = 0 \quad (x \to a).$$

すなわち, $\displaystyle\lim_{x \to a} |f(x) - f(a)| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるといえる. □

注意 8.4. 命題 8.3 の対偶として, 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ と $a \in X$ に対して, 次の主張が成り立つといえる:

$$f(x) \text{ は } x = a \text{ において不連続である} \Longrightarrow f(x) \text{ は } x = a \text{ において微分不可能である}.$$

従って, 微分可能であるか否かの議論は, 少なくとも連続であるような関数に対してのみ考えればよい.

[*1] 微分係数と同様に, $y = f(x)$ $(x \in X)$ とおき, 導関数を $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ とも書く (**Leibniz の記法**).

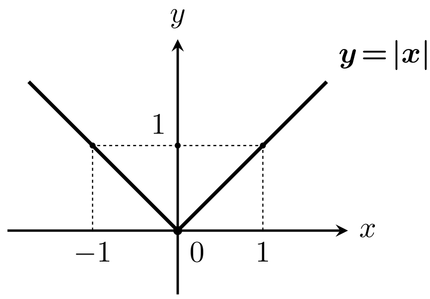
例 8.5. 関数 $f(x)=|\,x\,|\ (\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ に対して, 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x}$$

は発散する (cf. 例 6.4 (1)). 従って, 定義 8.1 より, $f(x)$ は $x=0$ において微分不可能である*2. 一方, この関数 $f(x)=|\,x\,|$ は $x\neq 0$ (i.e., $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$) においては微分可能である: 実際, $x\neq 0$ ならば,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\begin{cases}\ \ 1 & (x>0),\\ -1 & (x<0).\end{cases}$$

以上の事実は, xy-座標平面における曲線 $y=|\,x\,|\ (x\in\mathbb{R})$ の各点での接線の存在・非存在によって視覚的に説明することもできる (cf. 注意 8.2).



例 8.6. (0) 定数関数 $f(x)=c\ (\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ は実数全体において微分可能であり, その微分 (導関数) は $f'(x)=0$ である: 実際, 任意の実数 $x\ (\in\mathbb{R})$ に対して,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

(1) 1 次 (単項式) 関数 $f(x)=x\ (\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ は実数全体において微分可能であり, その微分 (導関数) は $f'(x)=1$ である: 実際, 任意の実数 $x\ (\in\mathbb{R})$ に対して,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

(2) 2 次 (単項式) 関数 $f(x)=x^2\ (\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ も実数全体において微分可能であり, その微分 (導関数) は $f'(x)=2\,x$ である: 実際, 任意の実数 $x\ (\in\mathbb{R})$ に対して,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2\,x\,h+h^2)-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2\,x+h)=2\,x.$$

定理 8.7 (初等関数の基礎微分公式). *単項式関数, 指数関数, 自然対数関数, および, 正弦関数, 余弦関数は, それぞれの定義域 (のすべての点) において微分可能であり, また, これらの関数の微分 (導関数) は以下の通りである:*

(1) $n=0,1,2,\cdots$ (非負整数) $\Longrightarrow (x^n)'=n\,x^{n-1}\quad(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$.

(2) $(e^x)'=e^x\quad(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$.

(3) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}\quad(\,x\in(0,\infty)\,)$.

(4) $(\sin x)'=\cos x,\ \ (\cos x)'=-\sin x\quad(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$.

証明. (1) $n=0,\,1$ の場合は明らかである. また, $n\geq 2$ の場合も, 実数 $h\neq 0$ に対して, Pascal の二項定理により,

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}&=\frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i\,x^{n-i}h^i-x^n\right)\qquad\left(\text{但し, }{}_n\mathrm{C}_i=\frac{n!}{i!\times(n-i)!}\ (\textbf{二項係数})\text{ とする.}\right)\\&=\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_i\,x^{n-i}h^i=n\,x^{n-1}+\sum_{i=2}^{n}{}_n\mathrm{C}_i\,x^{n-i}h^{i-1}\longrightarrow n\,x^{n-1}+0=n\,x^{n-1}\quad(h\to 0).\end{aligned}$$

*2 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|\,x\,|=0=f(0)$ より, 関数 $f(x)$ は $x=0$ において連続である (cf. 定義 7.1). このことからもわかるように, 命題 8.3 の逆の主張は一般に成立しないといえる.

従って, 任意の実数 $x\,(\in \mathbb{R})$ に対して $(x^n)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\,x^{n-1}$ である.

(2) 指数法則 (cf. 定理 3.5) と極限公式 $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (cf. (7.4)) から直ちに従う:

$$(\,e^x\,)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^x \times 1 = e^x.$$

(3) 自然対数法則 (cf. 定理 4.7) と極限公式 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ (cf. (7.3)) から直ちに従う:

$$\begin{aligned}(\,\log x\,)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\substack{h\to 0 \\ (h/x\to 0)}} \frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

(4) 正弦・余弦関数の加法定理 (cf. 定理 2.3 (i) & (ii)) と極限公式 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (cf. 命題 6.8 (1)) から従う. 実際, 正弦関数の加法定理により, 実数 $h \neq 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \sin\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{2}{h} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}} \longrightarrow \cos x \times 1 = \cos x \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

従って, 任意の実数 $x\,(\in \mathbb{R})$ に対して $(\,\sin x\,)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$ である. 同様にして,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right) \right\} \\ &= -\frac{2}{h} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right) = -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{h}{2}\right)}{\dfrac{h}{2}} \longrightarrow -\sin x \times 1 = -\sin x \quad (h \to 0).\end{aligned}$$

すなわち, $(\,\cos x\,)' = -\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ であるといえる. □

注意. 定理 8.7 で示した 4 つの微分公式は, 一度, その証明を理解 (納得) できたら, 後は形を覚えて使用すればよい.

練習問題 8. 次の関数 $f(x)$ の微分可能性を調べよ. また, (もし微分可能であれば) その微分 (導関数) $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (\,x \neq 0 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,)$ $\qquad$ (2) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (\,x \geq 0 \iff x \in [0, \infty)\,)$

解答. (1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は定義域全体において微分可能である: 実際, $x \neq 0$ に対して,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \times \frac{x - (x+h)}{(x+h)\,x} = \lim_{h\to 0} \left(-\frac{1}{(x+h)\,x} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$ は開区間 $(0, \infty) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}\ (\subsetneq [0, \infty)\,)$ において微分可能である: 実際, $x > 0$ に対して,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x+h) - x}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

尚, 以上の結果からもわかる通り, 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ は $x = 0$ において微分不可能である. □

2021年度 経済数学入門 I (第9 & 10回) 講義ノート[*1]

9 一般的な微分 (導関数) の計算原理 ①

定義 8.1 で述べた微分 (導関数) の定義, すなわち, (8.2) のような形の極限の議論から, 以下のようなことがいえる:

定理 9.1 (関数の四則演算の微分法則). 微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in X)$ に対して, その四則演算として定義される関数は, 定義域 (のすべての点) において微分可能である:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ \ \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \quad (x \in X). \\ &\text{(ii)}\ \ \{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \quad (x \in X). \\ &\text{(iii)}\ \ \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (\, x \in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\}\,). \end{aligned} \tag{9.1}$$

証明. (i) 任意の $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} \{f(x) \pm g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\{f(x+h) \pm g(x+h)\} - \{f(x) \pm g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$

(ii) 任意の $x \in X$ に対して,

$$\begin{aligned} \{f(x)\,g(x)\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times g(x) + f(x) \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} \times g(x) + f(x) \times \left\{ \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x). \end{aligned}$$

(iii) はじめに, $f(x) = 1$ (定数関数) の場合, すなわち,

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (\, x \in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\}\,) \tag{$*$}$$

が成り立つことが容易に示される: 実際,

$$\begin{aligned} \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{1}{g(x+h)\,g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\{ -\frac{1}{g(x+h)\,g(x)} \right\} \times \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{1}{\{g(x)\}^2} \times g'(x) = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}. \end{aligned}$$

このことから, 上述の (ii) により,

$$\begin{aligned} \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{ f(x) \times \frac{1}{g(x)} \right\}' &\overset{\text{(ii)}}{=} f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' \\ &\overset{(*)}{=} \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2}. \end{aligned}$$

□

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

注意 9.2. (1) **定数倍の微分法則：** 積の微分法則 (ii) を $g(x)=c$ (定数関数) として考えれば, 微分可能な関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$\{\, c\, f(x)\,\}' = c\, f'(x) \quad (x \in X). \tag{9.2}$$

が成り立つといえる[*2].

(2) **逆数の微分法則：** 既に定理 8.1 の証明で示した通り, 商の微分法則 (iii) を $f(x)=1$ (定数関数) として考えれば, 微分可能な関数 $g(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad (\, x \in \{\, x \in X \mid g(x) \neq 0 \,\}\,) \tag{9.3}$$

が成り立つ. このことから, 例えば, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, 定理 8.7 (1) より,

$$\left(\frac{1}{x^n} \right)' \overset{(9.3)}{=} -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{n\, x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,).$$

すなわち, 定理 8.7 (1) の微分公式と同様に, $(x^{-n})' = (-n)\, x^{(-n)-1}$ $(x \neq 0)$ であるといえる.

例題 9.3. 実際に (9.1), (9.2), (9.3) で紹介した微分法則を踏まえて, 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

(1) $x^4 - 8\,x^3 + 3\,x^2 - 2$　　(2) $(3\,x+2)\,(x^2+1)$　　(3) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$　　(4) $\tan x$

解答. (1) 和・差・定数倍の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から,

$$\begin{aligned}
\left(x^4 - 8\,x^3 + 3\,x^2 - 2 \right)' &\overset{(9.1\text{-i})}{=} \left(x^4 \right)' - \left(8\,x^3 \right)' + \left(3\,x^2 \right)' - (\,2\,)' \\
&\overset{(9.2)}{=} \left(x^4 \right)' - 8\,\left(x^3 \right)' + 3\,\left(x^2 \right)' - 2\,\left(x^0 \right)' \\
&= 4\,x^3 - 8 \times 3\,x^2 + 3 \times 2\,x - 0 \;=\; 4\,x^3 - 24\,x^2 + 6\,x.
\end{aligned}$$

(2) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から,

$$\begin{aligned}
\{\, (3\,x+2)\,(x^2+1)\,\}' &\overset{(9.1\text{-ii})}{=} (3\,x+2)' \times (x^2+1) + (3\,x+2) \times (x^2+1)' \\
&= 3 \times (x^2+1) + (3\,x+2) \times (2\,x) \\
&\qquad (\because\; (3\,x+2)' = 3\,(\,x\,)' + (\,2\,)' = 3, \quad (x^2+1)' = (\,x^2\,)' + (\,1\,)' = 2\,x.\,) \\
&= 3\,(x^2+1) + 2\,x\,(3\,x+2) \;=\; (3\,x^3+3) + (6\,x^2+4\,x) \;=\; 9\,x^2 + 4\,x + 3.
\end{aligned}$$

(3) 商の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)' &\overset{(9.1\text{-iii})}{=} \frac{(x+1)' \times (x^2+1) - (x+1) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{1 \times (x^2+1) - (x+1) \times (2\,x)}{(x^2+1)^2} \\
&\qquad (\because\; (x+1)' = (\,x\,)' + (\,1\,)' = 1, \quad (x^2+1)' = (\,x^2\,)' + (\,1\,)' = 2\,x.\,) \\
&= \frac{(x^2+1) - 2\,x\,(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1) - (2\,x^2+2\,x)}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2+2\,x-1}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

(4) 定義 2.1 から, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\, x \in \{\, x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0 \,\}\,)$ であるので, 商の微分法則 (および, 定理 8.7 (4)) から,

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \overset{(9.1\text{-iii})}{=} \frac{(\sin x)'\, \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

すなわち, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\left(x \neq \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2}, \cdots, \pm\dfrac{(2n+1)\pi}{2}, \cdots \right)$ であるといえる. □

[*2] 実際, これは定義 8.1 からも容易に示すことができる.

練習問題 9.1. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\ \ x^2 - x + 1 \qquad (2)\ \ (x+1)\,(x^2 - x + 1) \qquad (3)\ \ \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

解答. (1) 和・差の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から, $\big(x^2 - x + 1 \big)' \overset{(9.1\text{-i})}{=} \big(x^2 \big)' - \big(x \big)' + \big(1 \big)' \ = \ 2\,x - 1.$

(2) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から,

$$\begin{aligned}\big\{ (x+1)\,(x^2 - x + 1) \big\}' &\overset{(9.1\text{-ii})}{=} (x+1)' \times (x^2 - x + 1) + (x+1) \times (x^2 - x + 1)' \\ &= \ \ x^2 - x + 1 + (x+1)(2\,x - 1) = (x^2 - x + 1) + (2\,x^2 + x - 1) = 3\,x^2.\end{aligned}$$

(3) 商の微分法則 (および, 定理 8.7 (1)) から,

$$\left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)' \overset{(9.1\text{-iii})}{=} \frac{(x^3+1)'\,(x^2+1) - (x^3+1)\,(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{3\,x^2\,(x^2+1) - 2\,x\,(x^3+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x\,(x^3 + 3\,x - 2)}{(x^2+1)^2}.$$

□

練習問題 9.2. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\ \ x^3\,e^x \qquad (2)\ \ \frac{1}{e^x} \qquad (3)\ \ e^x\,\log x \quad (\,x > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \infty)\,) \qquad (4)\ \ \frac{\sin x}{e^x}$$

解答. (1) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (1) & (2)) から,

$$\big(x^3\,e^x \big)' \overset{(9.1\text{-ii})}{=} \big(x^3 \big)' \times e^x + x^3 \times (\,e^x\,)' = 3\,x^2\,e^x + x^3\,e^x = (x^3 + 3\,x^2)\,e^x = x^2\,(x+3)\,e^x.$$

(2) 商の微分法則 (および, 定理 8.7 (2)) から, $\left(\dfrac{1}{e^x} \right)' \overset{(9.3)}{=} -\dfrac{(\,e^x\,)'}{(\,e^x\,)^2} = -\dfrac{e^x}{e^{2x}} = -\dfrac{1}{e^x}$ である.

(3) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (2) & (3)) から,

$$(\,e^x\,\log x\,)' \overset{(9.1\text{-ii})}{=} (\,e^x\,)' \times \log x + e^x \times (\,\log x\,)' = e^x\,\log x + \frac{e^x}{x} = e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right).$$

(4) 商の微分法則 (および, 定理 8.7 (2) & (4)) から,

$$\left(\frac{\sin x}{e^x} \right)' \overset{(9.1\text{-iii})}{=} \frac{(\,\sin x\,)' \times e^x - \sin x \times (\,e^x\,)'}{(\,e^x\,)^2} = \frac{e^x\,(\cos x - \sin x)}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}.$$

(別解) 前問 (2) の結果と積の微分法則から, $\left(\dfrac{\sin x}{e^x} \right)' \overset{(9.1\text{-ii})}{=} (\,\sin x\,)' \times \dfrac{1}{e^x} + \sin x \times \left(\dfrac{1}{e^x} \right)' = \dfrac{\cos x - \sin x}{e^x}.$ □

練習問題 9.3. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\ \ e^x\,\cos x \qquad (2)\ \ \sin x\,\cos x \qquad (3)\ \ \log\,(x^2\,e^x) \quad (\,x \neq 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\,)$$

解答. (1) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (2) & (4)) から,

$$(\,e^x \cos x\,)' \overset{(9.1\text{-ii})}{=} (\,e^x\,)' \times \cos x + e^x \times (\,\cos x\,)' = e^x\,\cos x - e^x\,\sin x = e^x\,(\cos x - \sin x).$$

(2) 積の微分法則 (および, 定理 8.7 (4)) から,

$$(\,\sin x\,\cos x\,)' \overset{(9.1\text{-ii})}{=} (\,\sin x\,)' \times \cos x + \sin x \times (\,\cos x\,)' = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(3) 自然対数法則 (cf. 定理 4.7) により,

$$\log\,(x^2\,e^x) = \log\,(x^2) + \log\,(e^x) = 2\,\log x + x \quad (\text{cf. } (4.5)\,).$$

従って, 和・定数倍の微分法則 (および, 定理 8.7 (1) & (3)) から,

$$\big\{ \log\,(x^2\,e^x)\,\big\}' = (\,2\,\log x + x\,)' \overset{(9.1\text{-i})}{=} (\,2\,\log x\,)' + (\,x\,)' \overset{(9.2)}{=} 2\,(\,\log x\,)' + 1 = \frac{2}{x} + 1.$$

□

10　一般的な微分 (導関数) の計算原理 ②

定理 9.1 と同様に, 微分 (導関数) の定義から, 一般に次のようなこともいえる:

定理 10.1 (**合成関数の微分法則**)**.** 二つの微分可能な関数 $f(x)$ $(x \in X)$, $g(y)$ $(y \in Y)$ (但し, $f(X) \subset Y$) に対して, 合成関数 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ もまた X (のすべての点) において微分可能である:

$$\{\, \boldsymbol{g(}f(x)\boldsymbol{)}\,\}' = \boldsymbol{g'(}f(x)\boldsymbol{)} \times f'(x) \quad (x \in X). \tag{10.1}$$

証明. 任意の $x \in X$ に対して, 定義 8.1 より,

$$\{\, g(f(x))\,\}' \overset{(8.2)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}.$$

ここで, 命題 8.3 から, $f(x)$ は X (のすべての点) において連続であるといえるので, $f(x+h) - f(x) = k$ とおくと, $h \to 0$ のとき, $f(x+h) \to f(x)$, すなわち, $k \to 0$ である. 従って,

$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} = \lim_{k \to 0} \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \times \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

以上から, $\{\, g(f(x))\,\}' = g'(f(x)) \times f'(x)$ $(x \in X)$ であるといえる. □

補足 (Leibniz の記法による定理 10.1 の記述)**.** 合成関数の微分法則 (10.1) は, Leibniz の記法 (cf. 定義 8.1) を用いることで, 次のように簡潔に書き表すこともできる: 任意の $x \in X$ に対して, $y = f(x)$, $z = g(y) = g(f(x))$ とおくと,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}. \tag{10.1'}$$

すなわち, 微分法則 (10.1) は, (10.1') のような "形式的な記号 dx, dy, dz の有理式の変形法則" としても理解できる.

例えば, 任意の整数 m に対して, $g(y) = y^m$ とすると, $g'(y) = (\, y^m\,)' = m\, y^{m-1}$ (cf. 定理 8.7 (1) & 注意 9.2 (2)). 従って, 微分可能な関数 $f(x)$ $(x \in X)$ と $g(y)$ の合成関数 $g(f(x)) = \{f(x)\}^m$ について, 合成関数の微分法則から,

$$(\, \{f(x)\}^m\,)' \overset{(10.1)}{=} m\, \{f(x)\}^{m-1} \times f'(x) \quad (x \in X). \tag{10.2}$$

特に, $m = -1$ の場合として, $f(x) \neq 0$ ならば,

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\{f(x)\}^{-1}\right)' \overset{(10.2)}{=} -\{f(x)\}^{-2} \times f'(x) = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \quad (\text{cf. } (9.3)\,)$$

が得られる. 同様に, $g(y) = e^y$ とすると, 定理 8.7 (2) より, $g'(y) = (\, e^y\,)' = e^y$ であるので, 合成関数の微分法則によって,

$$\left\{\, e^{f(x)}\,\right\}' \overset{(10.1)}{=} e^{f(x)} \times f'(x) \quad (x \in X) \tag{10.3}$$

であるといえる. 更に, この (10.3) から, 次のような主張も得られる:

命題 10.2 (= **定理 8.7 (1) の完全な一般化**)**.** 任意の実数 a $(\in \mathbb{R})$ に対して,

$$(\, x^a\,)' = a\, x^{a-1} \quad (\, x \in (0, \infty)\,).$$

証明. 任意の実数 a に対して, $x^a := e^{a \log x}$ $(\, x \in (0, \infty)\,)$ と定義される (cf. (4.6)). 従って, 任意の $x > 0$ に対して,

$$(\, x^a\,)' = \left(e^{a \log x}\right)' \overset{(10.3)}{=} e^{a \log x} \times (\, a \log x\,)' \overset{(9.2)}{=} e^{a \log x} \times a\, (\, \log x\,)' = x^a \times a \times \frac{1}{x}.$$

(cf. 定理 8.7 (3)). すなわち, $(\, x^a\,)' = a\, x^{a-1}$ であるといえる. □

注意 10.3. 命題 10.2 の $a = 1/2$ の場合として, 任意の $x > 0$ に対して $\left(x^{1/2}\right)' = \dfrac{1}{2}\, x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}\, x^{-1/2}$. すなわち, $(\, \sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\, x \in (0, \infty)\,)$ が成り立つといえる (cf. 練習問題 8 (2)).

補足. 命題 10.2 と合成関数の微分法則を併せることで, (10.2) の一般化として, 微分可能な関数 $f(x)$ に対して,

$$(\{f(x)\}^a)' \overset{(10.1)}{=} a\,\{f(x)\}^{a-1}\times f'(x) \quad (\text{但し, } a \text{ は任意の}\dot{\text{実}}\dot{\text{数}}\text{とし, 更に "}f(x)>0\text{" とする}^{*1}). \tag{10.2'}$$

特に, $a=1/2$ の場合として, $f(x)>0$ ならば,

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \left(\{f(x)\}^{1/2}\right)' \overset{(10.2')}{=} \frac{1}{2}\,\{f(x)\}^{-1/2}\times f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

が成り立つといえる (cf. 注意 10.3).

例題 10.4. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\ \ (x+1)^3 \qquad (2)\ \ (x^2-1)^3\,(2x+3)^2 \qquad (3)\ \ e^{x^2} \qquad (4)\ \ \sqrt{x^2+x+1}$$

解答. (1) 合成関数の微分法則から, $\{(x+1)^3\}' \overset{(10.2)}{=} 3\,(x+1)^2\times(x+1)' = 3\,(x+1)^2\times 1 = 3\,(x+1)^2$.

(別解) $\{(x+1)^3\}' = \left(x^3+3x^2+3x+1\right)' = 3x^2+3\times 2x+3\times 1+0 = 3\,(x^2+2x+1) = 3\,(x+1)^2$.

(2) 合成関数の微分法則から,

$$\{(x^2-1)^3\}' \overset{(10.2)}{=} 3\,(x^2-1)^2\times(x^2-1)' = 3\,(x^2-1)^2\times(2x) = 6x\,(x^2-1)^2,$$

$$\{(2x+3)^2\}' \overset{(10.2)}{=} 2\,(2x+3)^1\times(2x+3)' = 2\,(2x+3)\times 2 = 4\,(2x+3).$$

従って, 積の微分法則から,

$$\begin{aligned}\left\{(x^2-1)^3\,(2x+3)^2\right\}' &= \{(x^2-1)^3\}'\times(2x+3)^2 + (x^2-1)^3\times\{(2x+3)^2\}' \\ &= 6x\,(x^2-1)^2\,(2x+3)^2 + 4\,(x^2-1)^3\,(2x+3) \\ &= 2\,(x^2-1)^2\,(2x+3)\,\{3x\,(2x+3)+2\,(x^2-1)\} = 2\,(x^2-1)^2\,(2x+3)\,(8x^2+9x-2).\end{aligned}$$

(3) 合成関数の微分法則から, $\left(e^{x^2}\right)' \overset{(10.3)}{=} e^{x^2}\times\left(x^2\right)' = e^{x^2}\times(2x) = 2x\,e^{x^2}$.

(4) 合成関数の微分法則から,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \left\{(x^2+x+1)^{1/2}\right\}' &\overset{(10.2')}{=} \frac{1}{2}\,(x^2+x+1)^{-1/2}\times(x^2+x+1)' \\ &= \frac{1}{2\,(x^2+x+1)^{1/2}}\times(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.\end{aligned}$$

□

練習問題 10.1. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\ \ (3x+1)^2 \qquad (2)\ \ (x+1)^3\,(x^2+x-1)^2 \qquad (3)\ \ \frac{1}{e^x} \qquad (4)\ \ \frac{e^x\pm e^{-x}}{2}$$

解答. (1) 合成関数の微分法則から, $\left\{(3x+1)^2\right\}' = 2\,(3x+1)^1\times(3x+1)' = 6\,(3x+1)$.

(2) 積の微分法則から,

$$\begin{aligned}\left\{(x+1)^3\,(x^2+x-1)^2\right\}' &= \left\{(x+1)^3\right\}'\times(x^2+x-1)^2 + (x+1)^3\times\left\{(x^2+x-1)^2\right\}' \\ &= 3\,(x+1)^2\times(x^2+x-1)^2 + (x+1)^3\times 2\,(x^2+x-1)\,(2x+1) \\ &= (x+1)^2\,(x^2+x-1)\,\left\{3\,(x^2+x-1)+2\,(x+1)\,(2x+1)\right\} \\ &= (x+1)^2\,(x^2+x-1)\,(7x^2+9x-1).\end{aligned}$$

---

*1 この条件は, a が整数でない場合にのみ, $g(y)=y^a$ ($y\in(0,\infty)$) と $y=f(x)$ の合成関数を定義するために必要となる.

(3) 指数法則 (cf. 定理 3.5) により, $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ であるので, 合成関数の微分法則から,

$$\left(\frac{1}{e^x}\right)' = \left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \times (-x)' = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}.$$

(4) 前問 (3) の結果から, $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$ であるので,

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' &= \frac{1}{2}\,\left(e^x + e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\,\left\{\left(e^x\right)' + \left(e^{-x}\right)'\right\} = \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' &= \frac{1}{2}\,\left(e^x - e^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\,\left\{\left(e^x\right)' - \left(e^{-x}\right)'\right\} = \frac{1}{2}\,\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

従って, $\left(\dfrac{e^x \pm e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x \mp e^{-x}}{2}$ である. □

練習問題 10.2. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ:

$$(1)\quad x\sqrt{2\,x^2+1} \qquad (2)\quad 2^x \qquad (3)\quad \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \qquad (4)\quad \frac{2\,x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

解答. (1) 合成関数の微分法則から,

$$\left(\sqrt{2\,x^2+1}\right)' = \left\{(2\,x^2+1)^{1/2}\right\}' \overset{(10.2')}{=} \frac{1}{2}\,(2\,x^2+1)^{-1/2} \times (2\,x^2+1)' = \frac{2\times 2\,x}{2\,(2\,x^2+1)^{1/2}} = \frac{2\,x}{\sqrt{2\,x^2+1}}.$$

従って, 積の微分法則から,

$$\left(x\sqrt{2\,x^2+1}\right)' = \left(\,x\,\right)' \times \sqrt{2\,x^2+1} + x \times \left(\sqrt{2\,x^2+1}\right)' = \sqrt{2\,x^2+1} + \frac{2\,x^2}{\sqrt{2\,x^2+1}} = \frac{4\,x^2+1}{\sqrt{2\,x^2+1}}.$$

(2) 定義 5.1 から, $2^x := e^{x\log 2}\ (\,x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\,)$ であるので, 合成関数の微分法則から,

$$\left(\,2^x\,\right)' = \left(\,e^{x\log 2}\,\right)' \overset{(10.3)}{=} e^{x\log 2} \times (\,x\log 2\,)' = e^{x\log 2} \times \log 2 = 2^x \log 2.$$

(3) 合成関数の微分法則から,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right)' = \left\{\,(x^2-x+1)^{-1/2}\,\right\}' &\overset{(10.2')}{=} -\frac{1}{2}\,(x^2-x+1)^{-3/2} \times (x^2-x+1)' \\ &= -\frac{2\,x-1}{2\,(x^2-x+1)^{3/2}} \\ &= -\frac{2\,x-1}{2\,(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.\end{aligned}$$

(4) 前問 (3) と同様, 合成関数の微分法則から,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)' = \left\{\,(x^2+x+1)^{-1/2}\,\right\}' &\overset{(10.2')}{=} -\frac{1}{2}\,(x^2+x+1)^{-3/2} \times (x^2+x+1)' \\ &= -\frac{2\,x+1}{2\,(x^2+x+1)^{3/2}} = -\frac{2\,x+1}{2\,(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.\end{aligned}$$

従って, 積の微分法則から,

$$\left(\frac{2\,x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)' = \frac{(2\,x+3)'}{\sqrt{x^2+x+1}} + (2\,x+3) \times \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)' = -\frac{4\,x-1}{2\,(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

□

2021 年度 経済数学入門 I (第 11 回) 講義ノート[*1]

11　より具体的な微分の計算法

11.1　対数関数の微分法 (対数微分法)

(10.2), (10.3), (10.2') と同様に, $g(y) = \log y$ ($y \in (0, \infty)$) として合成関数の微分法則 (定理 10.1) を適用すると, $g'(y) = \dfrac{1}{y}$ (cf. 定理 8.7 (3)) であるので,

$$\{\log(f(x))\}' \overset{(10.1)}{=} \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{但し, “}f(x) > 0\text{” とする}). \tag{11.1}$$

例えば, $f(x) = -x$ ($x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) とすると, 任意の $x < 0$ に対して, $f(x) = -x > 0$ であるので,

$$\{\log(-x)\}' \overset{(11.1)}{=} \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

従って, 既に (定義通りに) 示されていた微分公式 $\log x = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ と併せて, 一般に次のようなことがいえる:

補題 11.1 (定理 8.7 (3) の一般化)**.** 任意の実数 $x \neq 0$ に対して,

$$\{\log|x|\}' = \frac{1}{x} \quad \left(※\,|x| = \begin{cases} x & (x > 0), \\ -x & (x < 0) \end{cases} \right). \tag{11.2}$$

命題 11.2 (**対数微分法の原理**)**.** 微分可能な関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{但し, “}f(x) \neq 0\text{” とする}). \tag{11.3}$$

証明. 補題 11.1 を踏まえて, 合成関数の微分法則 (定理 10.1) を $g(y) = \log|y|$ として適用してみればよい. □

例題 11.3. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ.

$$(1)\quad \log(x^2+1) \qquad (2)\quad \log\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \qquad (3)\quad \log\sqrt{x^2+1}$$

解答.　実際, 命題 11.2 を用いて, 以下のように計算すればよい[*2]:

(1)　$\left\{\log(x^2+1)\right\}' \overset{(11.3)}{=} \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

(2)　対数法則 (cf. 定理 4.7) から, $\log\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = -\log(x^2+1)$ であるので,

$$\left\{\log\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right\}' = \{-\log(x^2+1)\}' = -\{\log(x^2+1)\}' \overset{(11.3)}{=} -\frac{2x}{x^2+1}.$$

(3)　前問 (2) と同様, 対数法則から, $\log\sqrt{x^2+1} = \log\left((x^2+1)^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ であるので,

$$\left\{\log\sqrt{x^2+1}\right\}' = \left\{\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right\}' = \frac{1}{2}\{\log(x^2+1)\}' \overset{(11.3)}{=} \frac{x}{x^2+1}.$$ □

注意. 例題 11.3 (2), (3) については, $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \{(x^2+1)^{-1}\}' \overset{(10.2')}{=} -(x^2+1)^{-2} \times (x^2+1)' = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \left\{(x^2+1)^{1/2}\right\}' \overset{(10.2')}{=} \dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} \times (x^2+1)' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めてから, 上述の命題 11.2 を適用してもよい. しかし, 上述の解答からもわかるように,

“対数法則 (定理 4.7) **を踏まえて” 命題 11.2 を用いる**のが, 最も合理的な計算方法 (**対数微分法**) である.

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.

[*2] 厳密にいえば, 任意の実数 x $(\in \mathbb{R})$ に対して $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ であるので, ここでは (11.1) を適用するだけで充分である.

11.2 三角関数の微分法

(11.1) と同様, $(\sin y)' = \cos y$, $(\cos y)' = -\sin y$ (cf. 定理 8.7 (4)) であるということから, 合成関数の微分法則 (定理 10.1) により, 一般に微分可能な関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して,

$$\{\sin(f(x))\}' = \cos(f(x)) \times f'(x), \qquad \{\cos(f(x))\}' = -\sin(f(x)) \times f'(x) \qquad (x \in X). \tag{11.4}$$

また, $(\tan y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ (cf. 例題 9.3 (4)) であることから, 合成関数の微分法則 (定理 10.1) により,

$$\{\tan(f(x))\}' = \frac{1}{\cos^2(f(x))} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} \qquad (x \in \{x \in X \mid \cos(f(x)) \neq 0\}). \tag{11.5}$$

注意. 上述の (11.5) は, 微分公式 (11.4) から, 商の微分法則を用いて導き出すこともできる:

$$\begin{aligned}\{\tan(f(x))\}' = \left\{\frac{\sin(f(x))}{\cos(f(x))}\right\}' &\overset{(9.1\text{-iii})}{=} \frac{\{\sin(f(x))\}'\cos(f(x)) - \sin(f(x))\{\cos(f(x))\}'}{\cos^2(f(x))} \\ &\overset{(11.4)}{=} \frac{\{\cos^2(f(x)) + \sin^2(f(x))\}f'(x)}{\cos^2(f(x))} = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}.\end{aligned}$$

例題 11.4. 次の関数の微分 (導関数) を求めよ: (1) $\sin x \cos x$ (2) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (3) $\tan(2x+3)$

解答. (1) 正弦関数の 2 倍角公式 (加法定理の特別な場合) から, $\sin(2x)$ $(= \sin(x+x)) = 2\sin x \cos x$, すなわち, $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$ であるので,

$$\begin{aligned}\{\sin x \cos x\}' = \left\{\frac{1}{2}\sin(2x)\right\}' &= \frac{1}{2}\{\sin(2x)\}' \\ &\overset{(11.4)}{=} \frac{1}{2}\cos(2x) \times (2x)' = \frac{1}{2}\cos(2x) \times 2 = \cos(2x).\end{aligned}$$

尚, 余弦関数の 2 倍角公式から, $\cos(2x)$ $(= \cos(x+x)) = \cos^2 x - \sin^2 x$ であるので, 上で得られた結果は, 以下のように, 積の微分法則を用いて得られる結果と同じである:

$$\{\sin x \cos x\}' = (\sin x)' \times \cos x + \sin x \times (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (\text{cf. 定理 8.7 (4)}).$$

(2) 前問 (1) でも述べた通り, 余弦関数の 2 倍角公式から,

$$\{\cos^2 x - \sin^2 x\}' = \{\cos(2x)\}' \overset{(11.4)}{=} -\sin(2x) \times (2x)' = -2\sin(2x) \ (= -4\sin x \cos x).$$

あるいは, 微分公式 (10.2') を用いて, 以下のようにして求めてもよい:

$$\begin{aligned}(\cos^2 x - \sin^2 x)' &= (\cos^2 x)' - (\sin^2 x)' \\ &\overset{(10.2')}{=} 2\cos x \times (\cos x)' - 2\sin x \times (\sin x)' = -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x = -4\sin x \cos x.\end{aligned}$$

(3) $\{\tan(2x+3)\}' \overset{(11.5)}{=} \dfrac{(2x+3)'}{\cos^2(2x+3)} = \dfrac{2}{\cos^2(2x+3)}$. □

■ **合成関数の微分法則の実用化 :** これまでの議論をまとめると, 合成関数の微分法則により, 定理 8.7 で述べた基礎微分公式の "一般形" というべき, 以下のような微分公式が導き出される:

(1') $\{f(x)^a\}' = a\,f(x)^{a-1} \times f'(x)$ (但し, $a \in \mathbb{R}$ は "任意の" 定数とする).

(2') $\left\{e^{f(x)}\right\}' = e^{f(x)} \times f'(x)$.

(3') $\{\log|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (但し, $f(x) \neq 0$ とする).

(4') $\{\sin(f(x))\}' = \cos(f(x)) \times f'(x)$, $\{\cos(f(x))\}' = -\sin(f(x)) \times f'(x)$, $\{\tan(f(x))\}' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$.

これら 4 種の公式を踏まえて, 四則演算 (和差積商) の微分法則を適用すれば, 実際に様々な関数の微分 (導関数) を具体的に求めることができる. (これが, **一般的な初等関数に対する最も合理的な微分の計算方法**である.)

2021 年度 経済数学入門 I (第 12 回) 講義ノート[*1]

12　微分法の応用 (1)

これまでに学んだ微分 (導関数) の計算結果から得られる応用例について紹介する.

定理 12.0 (**Rolle[*2]の定理**; 後述の平均値定理の原型)**.** 実数 $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して, 関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ は次の 2 つの条件を満たすものとする:

(i) $f(x)$ は $[a, b]$ において連続である.　(ii) $f(x)$ は (a, b) において微分可能である.

ここで, 更に, (iii) $f(a) = f(b)$ ならば,

$$f'(c) = 0 \text{ となるような実数 } c \in (a, b) \text{ (すなわち, } a < c < b\text{) が存在する.} \tag{12.0}$$

証明. (連続関数の) 最大・最小値原理 (cf. 定理 6.12) を用いて示される. □

定理 12.1 (**平均値定理**)**.** 実数 $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して, 以下のような主張が成立する:

(1) [**Lagrange[*3]の〜**] 関数 $f(x)$ $(x \in [a, b])$ が上述の定理 12.0 の (i), (ii) と同じ条件を満たすとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ となるような実数 } c \in (a, b) \text{ が存在する.} \tag{12.1}$$

(2) [**Cauchy[*4]の〜**] 関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in [a, b])$ は共に定理 12.0 の (i), (ii) と同じ条件を満たすとし, 更に,

$$g(a) \neq g(b), \qquad g'(x) \neq 0 \quad (\, x \in (a, b)\,)$$

であるとする. このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ となるような実数 } c \in (a, b) \text{ が存在する.} \tag{12.2}$$

証明. それぞれ, 以下のような形で定義される関数 $F(x)$ $(x \in [a, b])$ に対して定理 12.0 を適用すればよい:

(1) $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a);$

(2) $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,\{g(x) - g(a)\};$

(実際, 仮定から, これらの $F(x)$ が定理 12.0 の条件 (i), (ii), 更に, (iii) $F(a) = F(b)$ $(= 0)$ を満たしていることがわかる. 従って, (12.0) より, $F'(c) = 0$ となるような $c \in (a, b)$ が存在することから, (12.1), (12.2) が得られる.) □

補足. 上述の (12.0), (12.1) および (12.2) における実数 c は, a と b の間の線分を正比 $\theta : (1 - \theta)$ に分割する点であるといえることから, 次のように書き表されることもある:

$$c \in (a, b) \Longleftrightarrow c = (1 - \theta)\,a + \theta\,b \; (= a + \theta\,(b - a)) \text{ となるような } \theta \in (0, 1) \text{ が存在する.} \tag{12.3}$$

まず, Lagrange の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (1)) によって, 以下のようなことがいえる:

補題 12.2. 関数 $f(x)$ $(x \in X)$ は閉区間 $[a, b]\,(\subset X)$ において連続であり, また, 開区間 (a, b) において微分可能であるとする. このとき,

$$f'(x) = 0 \;\; (x \in (a, b)) \Longleftrightarrow f(x) = C \;\; (x \in [a, b]) \text{ となるような実数 } C \; (\in \mathbb{R}) \text{ が存在する.}$$

[*1] 担当・執筆：河村 尚明 (`hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.
[*2] Michel Rolle (1652–1719).
[*3] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813).
[*4] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

証明. [$\Longrightarrow$] 任意の $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ に対して, Lagrange の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (1)) より,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \Longleftrightarrow f(x_2) = f(x_1) + f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

となるような $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ が存在する. ここで, 仮定から $f'(c) = 0$ であるので, $f(x_2) = f(x_1) + 0 = f(x_1)$. すなわち, $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ において常に一定の値を取る定数関数である.

[$\Longleftarrow$] 例 7.6 (0) でも示した通り, 定数関数 $f(x) = C$ $(x \in [a,b])$ に対して $f'(x) = 0$ $(x \in (a,b)\,)$ である. □

定理 12.3. 連続関数 $f(x)$, $g(x)$ $(x \in [a,b])$ は開区間 (a,b) において微分可能であるとする. このとき,

$f'(x) = g'(x)$ $(x \in (a,b)) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + C$ $(x \in [a,b])$ となるような実数 C $(\in \mathbb{R})$ が存在する.

証明. 関数 $F(x) = f(x) - g(x)$ $(x \in [a,b])$ に対して, 補題 12.2 を適用すればよい. □

また, 補題 12.2 の証明と同様の議論を用いて, 次のような主張が成立することもわかる:

定理 12.4 ("増減表" の議論の基本原理). 連続関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ は開区間 (a,b) において微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ が (狭義) 単調性 (cf. 定義 3.7) を持つための充分条件として, 次のようなことがいえる:

(i) $f'(x) > 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ において (狭義) 単調増加である (特に, $f(a) < f(b)$).
(ii) $f'(x) < 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ において (狭義) 単調減少である (特に, $f(a) > f(b)$).

証明. (i) $f'(x) > 0$ ($x \in (a,b)$) と仮定すると, $x_1, x_2 \in [a,b]$ に対して, $x_1 < x_2$ (i.e., $x_2 - x_1 > 0$) ならば, Lagrange の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (1)) より, ある $c \in (a,b)$ が存在して,

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(c)\,(x_2 - x_1) > f(x_1) + 0 = f(x_1).$$

すなわち, $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in [a,b]) \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ より, $f(x)$ $(x \in [a,b])$ は (狭義) 単調増加である.

(ii) 上述の (i) の証明と同様にして示される. □

注意. 上述の定理 12.4 における (i), (ii) の逆の主張は一般に成立しない: 例えば, 3 次 (単項式) 関数 $f(x) = x^3$ は閉区間 $[-1,1]$ において明らかに (狭義) 単調増加であるが, 一方で $f'(x) = 3\,x^2 \geq 0$ ($x \in (-1,1)$) である. 従って, 主張 (i) の逆は一般に成立しない. 同様に, $f(x) = -x^3$ ($x \in [-1,1]$) は (狭義) 単調減少であるが, $f(x) = -3\,x^2 \leq 0$ ($x \in (-1,1)$) であるので, (ii) の逆もまた一般には成立しないといえる.

補足. 補題 12.2 および 定理 12.4 の証明と同様の議論を用いて, 開区間 (a,b) において微分可能であるような (連続) 関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ が **"広義" 単調性**[*5] を持つための必要充分条件として, 次のようなこともいえる:

(i') $f'(x) \geq 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ において "広義" 単調増加である (特に, $f(a) \leq f(b)$).
(ii') $f'(x) \leq 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ において "広義" 単調減少である (特に, $f(a) \geq f(b)$).

与えられた初等関数に対して微分 (導関数) を具体的に求めることができれば, 定理 12.4 から, そのグラフの概形を求めることができる.

例題 12.5. 3 次 (多項式) 関数 $f(x) = x^3 - 3\,x$ ($x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) に対して,

$$f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\,(x^2 - 1) = 3\,(x+1)(x-1).$$

このことから,

⓪ $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$.
① $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < -1$ または $x > 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
② $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow -1 < x < 1 \Longleftrightarrow x \in (-1, 1)$.

[*5] 一般に "$x_1,\, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (あるいは, $f(x_1) \geq f(x_2)$)" が成り立つとき, 関数 $f(x)$ $(x \in [a,b])$ は**広義単調増加** (あるいは, **広義単調減少**) であるという.

従って, 定理 12.4 より,

① $f(x)$ は $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ において (狭義) 単調増加である.
② $f(x)$ は $[-1,1]$ において (狭義) 単調減少である.

以上で得られた結果をまとめると, 以下の通りとなる:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ (単調増加)	2	$\searrow$ (単調減少)	-2	$\nearrow$ (単調増加)

図 12.1　$f(x) = x^3 - 3\,x$ の増減表

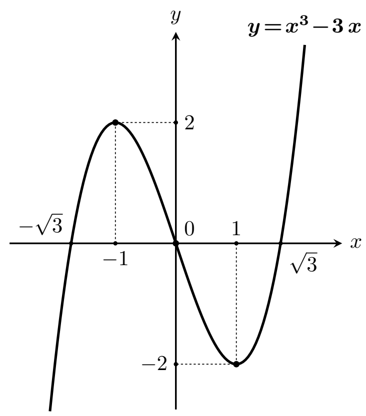


図 12.2　$f(x) = x^3 - 3\,x$ のグラフ

尚, 定理 12.4 は, 2 つの関数の値の大小関係 (不等式) を調べる際にも有用である.

例 12.6. 任意の実数 $x > 0$ に対して, 次のような不等式が成り立つといえる:

$$\log(1+x) < x$$

実際, $f(x) = x - \log(1+x)$ ($x \in (0,\infty)$) とおくと, $f(x)$ は開区間 $(0,\infty)$ において微分可能であり, 更に, 任意の $x \in (0,\infty)$ に対して

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad (\because\ x > 0)$$

であることから, 定理 12.4 (i) を $a = 0,\ b = x\ (> 0)$ として適用することで, $f(x)$ は閉区間 $[0,x]$ $(\subset [0,\infty))$ において (狭義) 単調増加であるといえる. 従って, 特に, 任意の $x > 0$ に対して $f(x) > f(0) = 0$. すなわち, $x - \log(1+x) > 0 \Longleftrightarrow \log(1+x) < x$ である.

練習問題 12.1. 次の関数に対して, グラフの概形を求めよ.

(1) $f(x) = x^2\,(1-x)^3$　　　(2) $f(x) = x^2\,e^x$

解答. (1) 積の微分法則により

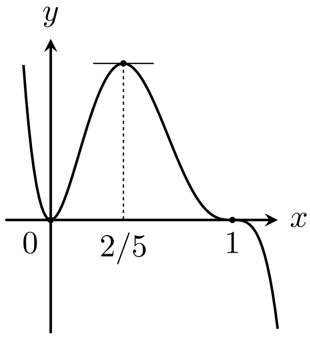
$$\begin{aligned} f'(x) = \left\{x^2\,(1-x)^3\right\}' &= \left(x^2\right)' \times (1-x)^3 + x^2 \times \left\{(1-x)^3\right\}' \\ &= 2\,x\,(1-x)^3 + x^2 \times 3\,(1-x)^2 \times (1-x)' \quad (\because\ \text{合成関数の微分法則}) \\ &= 2\,x\,(1-x)^3 - 3\,x^2(1-x)^2 = x\,(1-x)^2\,\{2\,(1-x) - 3\,x\} = -x\,(1-x)^2\,(5\,x-2). \end{aligned}$$

従って, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \dfrac{2}{5}, 1$ であり, また,

$$f'(x) < 0 \ \ (x<0), \quad f'(x) > 0 \ \ \left(0 < x < \frac{2}{5}\right), \quad f'(x) < 0 \ \ \left(\frac{2}{5} < x < 1\right), \quad f'(x) < 0 \ \ (x > 1)$$

であるといえる. 定理 12.4 を踏まえて, これらを増減表にまとめると, 以下の通りとなる:

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2/5$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$108/3125$	$\searrow$	0	$\searrow$



(2) 積の微分法則により

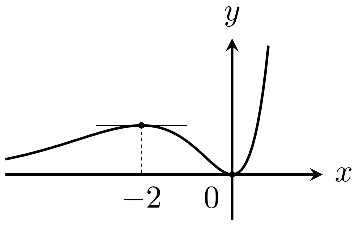
$$f'(x) = \left\{x^2\, e^x\right\}' = \left(\, x^2\,\right)' \times e^x + x^2 \times (\, e^x\,)' = 2\,x\,e^x + x^2\,e^x = (x^2 + 2\,x)\,e^x = x\,(x+2)\,e^x.$$

従って, $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -2, 0$ であり, また,

$$f'(x) > 0 \;\;(x < -2), \quad f'(x) < 0 \;\;(-2 < x < 0), \quad f'(x) > 0 \;\;(x > 0)$$

であることから, これらを増減表にまとめると, 定理 12.4 より,

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4/e^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$



□

補足 (関数の極大・極小値)**.** 上述の結果からもわかるように, $f'(x)$ の値の "正負が逆転する点" において, 関数 $f(x)$ は **局所的** (部分的) **な最大・最小値** (※このような値のことを, 関数 $f(x)$ の**極大・極小値**ともいう) を取るといえる.

練習問題 12.2. 任意の (正の) 実数 $x > 0$ (i.e., $x \in (0, \infty)$) に対して, 次の不等式が成り立つことを, 例 12.6 と同様, 定理 12.4 を用いて示せ:

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

解答. 問題の不等式が成り立つことは, 以下のように二つに分けて示せばよい:

$$(1) \quad x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) \quad (\, x \in (0, \infty)\,). \qquad (2) \quad \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (\, x \in (0, \infty)\,).$$

(1) $f(x) = \log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ ($x \in (0, \infty)$) とおくと, 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (\because\; x > 0)$$

であることから, 定理 12.4 (i) を $a = 0$, $b = x$ (> 0) として適用することで, $f(x)$ は閉区間 $[\,0, x\,]$ ($\subset [\,0, \infty)$) において (狭義) 単調増加であるといえる. 従って, 特に, 任意の $x > 0$ に対して $f(x) > f(0) = 0$. すなわち, (1) の不等式は一般に成り立つ.

(2) $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \log(1+x)$ ($x \in (0, \infty)$) とおくと, 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} > 0 \quad (\because\; x > 0)$$

であるので, 上述の (1) と同様, 定理 12.4 (i) により, $g(x)$ は閉区間 $[\,0, x\,]$ ($\subset [\,0, \infty)$) において (狭義) 単調増加であるといえる. 従って, 特に, 任意の $x > 0$ に対して $g(x) > g(0) = 0$. すなわち, (2) の不等式も一般に成り立つ. 以上により, 題意は示された. □

2021 度 経済数学入門 I (第 13 回) 講義ノート[*1]

13　微分法の応用 (2)

微分のもう一つの重要な応用例として, Cauchy の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (2)) から, 以下のような $\dfrac{0}{0}$, $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形極限の計算原理が得られる:

定理 13.1 (**l'Hôpital**[*2](あるいは, Bernoulli[*3] ?) **の定理**)**.** ある実数 a $(\in \mathbb{R})$ および (正の) 実数 $\delta > 0$ に対して, 関数 $f(x)$, $g(x)$ $(a-\delta < x < a+\delta)$ は微分可能であるとし, 更に,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \ \left(\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\right), \ \text{あるいは},$$

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty \ \left(\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ (\text{※複号同順でなくてもよい})\right)$$

とする. このとき, もし極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が (有限の値に) 収束するならば, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ もまた同じ値に収束する:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

証明. 紙面の都合により, ここでは省略する. □

例 13.2. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ は $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であるが, 実際は $\dfrac{1}{6}$ に収束する: 実際, 分母・分子の (初等) 関数は ($x=0$ の近傍において) 明らかに微分可能であるので, 定理 13.1 より,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(\,x^3\,)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\,x^2}.$$

ここで得られた $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形極限に対して, 再度, 定理 13.1 を適用することで,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3\,x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6\,x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}. \tag{13.1}$$

従って, 極限公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (cf. 命題 6.8 (1)) から,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{(13.1)}{=} \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}\times 1 = \frac{1}{6}.$$

注意 13.3 (**l'Hôpital の定理の誤用**)**.** 上述の通り, 定理 13.1 は不定形極限を求める際に非常に有用であるが, 実際に使用する上で幾つか注意すべき点もある. 例えば, 例 13.2 の極限に対して定理 13.1 を二度繰り返し適用して (13.1) の極限が得られていたが, ここで, 最後に残った極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めるために, 更にもう一度, 定理 13.1 を用いて,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\,x\,)'} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1 \tag{13.2}$$

としてはならない. 何故ならば, (13.2) の $(*)$ で用いた正弦関数の微分公式 $(\sin x)' = \cos x$ は, 定理 8.7 (4) で実際に示した通り, 極限公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

を用いて導かれたものである. 従って, 上述の (13.2) は**循環論法**と呼ばれる論理的に破綻した議論なのである. 同様の理由から, 例えば, 次のような極限公式が成立することも, 定理 13.1 を用いて説明してはならないといえる:

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (`hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp`) ※左記の `<at>` 部分は各自で `@` に置き換えて使用して下さい.

[*2] Guillaume de l'Hôpital (1661–1704) : 1696 年に欧州で最初の微分積分学に関する指南書を出版したことでも知られる.

[*3] Johann Bernoulli (1667–1748) : Jakob Bernoulli の弟であり, また, l'Hôpital の師でもあった.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\quad (\text{cf. 例 7.5, 練習問題 7}).$$

補足. 定理 13.1 の主張は $a=\pm\infty$ として, 開区間 (M,∞) (あるいは, $(-\infty,M)$) において微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ の商の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\text{あるいは, }\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ が $\dfrac{0}{0}$ や $\pm\dfrac{\infty}{\infty}$ 型となる場合にも同様に成立する:

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=\lim_{x\to\pm\infty}|g(x)|=0 \text{ または } \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.3}$$

また, これは $x\to a\pm 0$ としても全く同様に成立する. これらも含めて, 定理 13.1 を一般に l'Hôpital の定理と呼ぶ.

練習問題 13. 次の関数の極限を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{b^x}$ (但し, $a>0$, $b>1$ とする)　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}x\log x$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ (但し, $0<a\neq 1$ とする)

解答. (1) $n=[\,a\,]+1$ (但し, $[\,a\,]$ は (実) 定数 a の整数部分とする) とおくと, 任意の (正の) 実数 $x>0$ に対して $0<\dfrac{x^a}{b^x}<\dfrac{x^n}{b^x}$ ($\because 0<a<n\Longrightarrow 0<x^a=e^{a\log x}<e^{n\log x}=x^n$) であるといえるので, 極限の (広義) 単調性 (cf. 定理 6.6 (2)) から,

$$0\le\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{b^x}\le\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{b^x}$$

であるといえる. ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^n=\infty$ $(n\ge 1)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}b^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\log b}=\infty$ $(b>1\Longleftrightarrow\log b>0)$ であることから, l'Hôpital の定理 (cf. (13.3)) を n 回繰り返し適用すれば, $(b^x)'=b^x\log b$ (cf. 練習問題 10.2 (2)) より,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{b^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{b^x\log b}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!\,x}{b^x(\log b)^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{b^x(\log b)^n}=0.$$

従って, はさみうちの原理 (cf. 定理 6.7) により, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{b^x}=0$ (但し, $a>0, b>1$).

(2) 任意の実数 $x>0$ に対して $x\log x=\dfrac{\log x}{x^{-1}}$ である. ここで, $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}\left|x^{-1}\right|=\lim_{x\to 0+0}x^{-1}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}|\log x\,|=\infty$ であることから, l'Hôpital の定理により,

$$\lim_{x\to 0+0}x\log x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\log x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}=-\left(\lim_{x\to 0+0}x\right)=0.$$

(3) 一般に $a^x:=e^{x\log a}$ $(x\in\mathbb{R})$ であることを踏まえて, 任意の $x\neq 0$ に対して $y=x\,\log a$ とおくと,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a}-1}{x}=\log a\,\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a}-1}{x\,\log a}=\log a\left(\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\right)=\log a\times 1=\log a$$

(cf. 練習問題 7). **尚, 注意 13.3 でも述べたように, この極限は l'Hôpital の定理を用いて求めてはならない:** 実際, 任意の実数 x $(\in\mathbb{R})$ に対して, 一般に $(a^x)'=a^x\log a$ (cf. 練習問題 10.2 (2)) であるといえるが, これは

$$\begin{aligned}(a^x)'&\overset{(\text{定義})}{=}\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\times a^h-a^x}{h}\quad(\because\ \text{指数法則})\\&=a^x\underline{\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right)}\end{aligned}$$

であるので, 極限公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$ が成り立つことと同義である. 従って, 微分公式 $(a^x)'=a^x\,\log a\cdots(*)$ が成り立つことを使って, 定理 13.1 から,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)'}{(\,x\,)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x)'-0}{1}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}a^x\log a=1\times\log a=\log a$$

とするのは**循環論法**である. □

2021年度 経済数学入門 I (第14回) 講義ノート[*1]

14 高階微分とその応用

与えられた関数を "複数回繰り返し微分する" ことで得られるものとして, 次のような概念を導入する:

定義 14.1 (関数の高階微分). ある開区間 $X\,(\subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty))$ において定義された関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して, その導関数 $f'(x)$ $(x \in X)$ の微分 (導関数), すなわち,

$$\boldsymbol{f''(x)} \left(= \{\, f'(x)\,\}' \right) := \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad (x \in X) \tag{14.1}$$

のことを, $f(x)$ の **2 階微分**[*2](あるいは, **2 階導関数**) という. より一般に,

$$\boldsymbol{f^{(0)}(x)} := f(x),\quad \boldsymbol{f^{(1)}(x)} := f'(x),\quad \boldsymbol{f^{(2)}(x)} := f''(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{f^{(n)}(x)} := \left\{\, f^{(n-1)}(x) \,\right\}',\ \cdots \tag{14.1'}$$

として定義される関数 $f^{(n)}(x)$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ のことを, $f(x)$ の $\boldsymbol{n}$ **階微分** (あるいは, $\boldsymbol{n}$ **階導関数**) という.

補足. 与えられた関数 $f(x)$ $(x \in X)$ に対して, その n 階微分 (n 階導関数) $f^{(n)}(x)$ $(x \in X)$ が定義できる (例えば, $n=2$ の場合, 任意の $x \in X$ に対して (14.1) のような形の極限が収束する) とき, $f(x)$ は $\boldsymbol{n}$ **階微分可能**であるという.

例 14.2. $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ $(\, x \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)\,)$ に対して,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^3 - 3\,x^2 \right)' = 3\,x^2 - 3 \times 2\,x = 3\,x^2 - 6\,x,\\
f''(x) &= \{\, f'(x)\,\}' = \left(3\,x^2 - 6\,x \right)' = 3 \times 2\,x - 6 \times 1 = 6\,x - 6,\\
f'''(x) &= \{\, f''(x)\,\}' = (\,6\,x - 6\,)' = 6 \times 1 - 0 = 6, \qquad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n = 4,5,\cdots).
\end{aligned}$$

このように, 与えられた関数を (複数回) 繰り返して微分すれば, その高階微分 (高階導関数) が求められる.

定理 14.3 (基本的な初等関数の "高階" 微分公式). 任意の自然数 $n = 1,2,3,\cdots$ に対して,

(1) $m = 0,1,2,\cdots$ (非負整数) に対して, $(\,x^m\,)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n} & (n \le m) \\ 0 & (n > m), \end{cases}$ $\quad (\,x \in \mathbb{R}\,)$.

一般に, 任意の定数 a $(\in \mathbb{R})$ に対して, $(\,x^a\,)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)\,x^{a-n}$ (但し, $x > 0$ とする).

(2) $(\,e^x\,)^{(n)} = e^x \quad (\,x \in \mathbb{R}\,)$.

(3) $(\,\log|x|\,)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (但し, $x \neq 0$ とする).

(4) $(\,\sin x\,)^{(n)} = \sin\!\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $(\,\cos x\,)^{(n)} = \cos\!\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $\quad (\,x \in \mathbb{R}\,)$.

証明. 定理 8.7 で述べた基礎微分公式をもとにして, 実際に, それぞれの関数を繰り返し微分してみればよい. □

14.1 関数の凸 (とつ) 性

定義 14.4 (関数の凸性). ある区間 $X\,(\subset \mathbb{R})$ 上において定義された関数 $f(x)$ $(\,x \in X\,)$ に対して, 次のような主張が一般に成り立つとき, $f(x)$ は X 上において **(狭義の) 下に凸**であるという:

$$x_1,\,x_2 \in X,\ 0 < t < 1 \implies f\left((1-t)\,x_1 + t\,x_2\right) < (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2).$$

同様に, 次の主張が成り立つとき, $f(x)$ は X 上において **(狭義の) 上に凸**であるという:

$$x_1,\,x_2 \in X,\ 0 < t < 1 \implies f\left((1-t)\,x_1 + t\,x_2\right) > (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2).$$

[*1] 担当・執筆 : 河村 尚明 (hkawamur <at> alpha.shudo-u.ac.jp) ※左記の <at> 部分は各自で @ に置き換えて使用して下さい.
[*2] これは, 関数 $f(x)$ を 2 回繰り返して微分したものであるといえるので, $f(x)$ の **2 回微分**とも呼ばれる.

定理 14.5 (2 階微分による凸性の判定法). 連続関数 $f(x)$ ($x \in [a,b]$) が開区間 (a,b) において 2 階微分可能である (すなわち, $f''(x)$ ($x \in (a,b)$) が実際に定義可能である) とき, 次のようなことがいえる:

(i) $f''(x) > 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ 上において (狭義の) 下に凸である.

(ii) $f''(x) < 0$ ($x \in (a,b)$) $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $[a,b]$ 上において (狭義の) 上に凸である.

証明. 定理 12.4 と同様に, Lagrange の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (1)) を用いて示される. □

増減表の基本原理 (cf. 定理 12.4) と上述の定理 14.5 を併せて考えれば, 関数のグラフの形を "より正確に" 調べることができる.

例 14.6. 関数 $f(x) = 3\,x^4 - 4\,x^3 + 2$ ($x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) に対して, その (1 階) 微分を求めると,

$$f'(x) = \left(3\,x^4 - 4\,x^3 + 2\right)' = 3 \times 4\,x^3 - 4 \times 3\,x^2 + 0 = 12\,x^3 - 12\,x^2.$$

(従って, $f'(x) = 12\,x^2\,(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ 1$ である.) 更に, $f'(x)$ をもう一度微分すると,

$$f''(x) = \left(12\,x^3 - 12\,x^2\right)' = 12\left(x^3 - x^2\right)' = 12\,(3\,x^2 - 2\,x) = 12\,x\,(3\,x - 2).$$

従って, $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ \dfrac{2}{3}$. また,

$$\text{(i)}\ f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0 \text{ または } x > \frac{2}{3}, \qquad \text{(ii)}\ f''(x) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$$

であるので, 定理 14.5 から,

(i) $f(x)$ は $(-\infty, 0] \cup [2/3, \infty)$ において (狭義の) 下に凸である.

(ii) $f(x)$ は $[0, 2/3]$ において (狭義の) 上に凸である.

これらのことも含めて, $f(x) = 3\,x^4 - 4\,x^3 + 2$ の増減表を作成すると, 以下のようになる:

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

$\xrightarrow{\text{精密化}}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2/3$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$ (下に凸)	2	$\searrow$ (上に凸)	$38/27$	$\searrow$ (下に凸)	1	$\nearrow$ (下に凸)

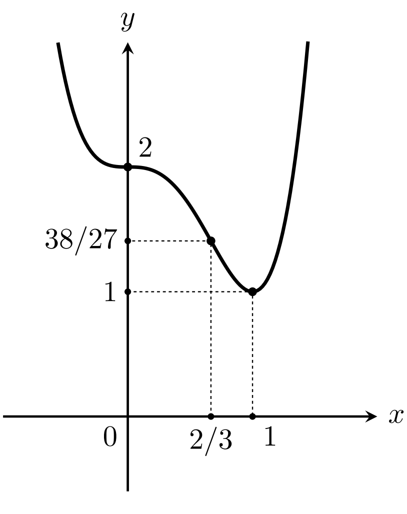


図 14.1 $f(x) = 3\,x^4 - 4\,x^3 + 2$ のグラフ

ここで得られた増減表をもとにして, 実際に $f(x) = 3\,x^4 - 4\,x^3 + 2$ のグラフを図示したものが, 左の図 14.1 である. このように, 関数 $f(x)$ に対して (1 階) 微分 $f'(x)$ を求めた後, 更に, それを微分して 2 階微分 $f''(x)$ を求めておけば, 定理 12.4 & 14.5 から, より正確なグラフの形がわかる.

注意. 図 14.1 のグラフの形から, $x = 0,\ \dfrac{2}{3}$ の前後において関数 $f(x)$ が (狭義) 単調減少する様相 (i.e., 凸性) に変化が生じていることが確認できる. このように 2 階微分 $f''(x)$ の値の "正負が逆転する" ような点 x のことを, 一般に (関数 $f(x)$ の) **変曲点**という.

補足. 与えられた関数 $f(x)$ に対して, 2 階微分 $f''(x)$ を計算することで, その極値 (すなわち, 極大・極小値) を合理的に求める方法もある. (このことについては, 後期に開講予定の『経済数学入門 II』において紹介する.)

14.2 Taylor & Maclaurin の定理 (※定期試験の範囲には含まれない内容)

定理 14.7 (**Taylor**[*3]**の定理**)**.** ある自然数 $n\ (=1,2,\cdots)$ に対して, 関数 $f(x)\ (\,x\in[a,b]\,)$ は開区間 (a,b) において $(n+1)$ 階微分可能であるとする (cf. 定義 14.1). このとき,

$$f(b)=\left\{f(a)+f'(a)\,(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}\,(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(b-a)^n\right\}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1} \tag{14.2a}$$

となるような $c\in(a,b)$ が (少なくとも 1 つは) 必ず存在する. 同様に

$$f(a)=\left\{f(b)+f'(b)\,(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}\,(a-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(b)}{n!}\,(a-b)^n\right\}+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(a-b)^{n+1} \tag{14.2b}$$

となるような $c\in(a,b)$ もまた (少なくとも 1 つは) 必ず存在する.

注意 14.8. 特に "$n=0$" の場合における定理 14.7 の主張は, (Lagrange の) 平均値定理 (cf. 定理 12.1 (1)) の主張に他ならないといえる: 実際, $n=0$ のときの等式 (14.2a), (14.2b) から,

$$f(b)=f(a)+f'(c)\,(b-a)\iff\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad(\,c\in(a,b)\,).$$

定理 14.7 の証明. 例えば, 任意の $x\in[a,b]$ に対して,

$$F(x)=f(b)-\left\{f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}\,(b-x)^i\right\},\qquad G(x)=(b-x)^{n+1}$$

とおいて, これらに対して Cauchy の平均値定理 (cf. 定理 12.1 (2)) を適用すると (14.2a) が得られる. また, (14.2b) についても同様である. □

定理 14.7 からの自然な帰結として, 次のような主張が得られる:

定理 14.9 (**"有限次" Taylor 展開**)**.** 実数 $\alpha\,(\in\mathbb{R})$ を任意に一つ固定して, 関数 $f(x)$ は $x=\alpha$ を含む開区間 (a,b) (すなわち, $a<\alpha<b$) において $(n+1)$ 階微分可能であるとする. このとき, 任意の $x\in(a,b)$ に対して,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}\,(x-\alpha)^i+\frac{f^{(n+1)}((1-\theta)\,\alpha+\theta\,x)}{(n+1)!}\,(x-\alpha)^{n+1} \tag{14.3}$$

となるような実数 $0<\theta<1$ が存在する[*4]. 尚, 上述の等式 (14.3) のことを, $f(x)\ (\,x\in(a,b)\,)$ の $x=\alpha\,(\in(a,b))$ を中心とする **$(n+1)$ 次 Taylor 展開**という. 尚, この右辺における第一項 (※波線部) のことを**主要項**, あるいは, $f(x)$ の **n 次 Taylor 近似多項式**といい, また, 第二項のことを **(Lagrange 型の) 剰余項**[*5]という.

証明. 実際, $x=\alpha$ に対して等式 (14.3) $\Leftrightarrow f(\alpha)=f^{(0)}(\alpha)$ が成り立つことは明らかである. また, $x\neq\alpha\ (\,x\in(a,b)\,)$ に対して (i) $\alpha<x$ ならば $[\alpha,x]\subset(a,b)$, (ii) $x<\alpha$ ならば $[x,\alpha]\subset(a,b)$ である. 従って, (i) の場合は $a=\alpha,\ b=x$ として等式 (14.2a) を, (ii) の場合は $a=x,\ b=\alpha$ として等式 (14.2b) を考えることで

$$f(x)=f(\alpha)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}\,(x-\alpha)^i+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(x-\alpha)^{n+1}$$

となるような実数 c が "α と x の間に" 存在するといえる (すなわち, (i) の場合は $c\in(\alpha,x)$, また, (ii) の場合は $c\in(x,\alpha)$ である). ここで, 上のような c は α と x の間の閉区間 (線分) を "正比 $\theta:(1-\theta)$ に分割する点" であるとも考えられることから, $c=(1-\theta)\,\alpha+\theta\,x$ (但し, $0<\theta<1$) のような形で表せば (14.3) が得られる. □

[*3] Brook Taylor (1685–1731) : イギリスの数学者 (John Machin の弟子).

[*4] この実数 $\theta\in(0,1)$ は, 与えられた変数 $x\in(a,b)$ の値に依存して (少なくとも 1 つ) 決定されるものである.

[*5] 定理 14.7 の証明を $n=0$ として考えることで Lagrange の平均値定理の主張が導き出される (cf. 注意 14.8). このことから, 上述の Taylor 展開 (14.3) の剰余項のことを, 敢えて **"Lagrange 型の" 剰余項**ということもある.

定理 14.10 (**Maclaurin**[*6]**の定理**)**.** 関数 $f(x)$ は $x=0$ を含む開区間 (a,b) (すなわち, $a<0<b$ である) において $(n+1)$ 階微分可能であるとする．このとき, 任意の $x\in(a,b)$ に対して,

$$f(x)=\left\{f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}\,x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\right\}+\frac{f^{(n+1)}(\theta\,x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \tag{14.3'}$$

となるような実数 $0<\theta<1$ が存在する．尚, この等式 (14.3') (すなわち, $x=0$ を中心とする $f(x)$ の $(n+1)$ 次 Taylor 展開) のことを一般に, 関数 $f(x)$ $(\,x\in(a,b)\,)$ の $\boldsymbol{(n+1)}$ **次 Maclaurin 展開** (あるいは, $\boldsymbol{(n+1)}$ **次 Taylor-Maclaurin 展開**) といい, その主要項として得られる n 次の多項式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\,x^i=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2!}\,x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

のことを, $f(x)$ の $\boldsymbol{n}$ **次 (Taylor-) Maclaurin 近似多項式**ともいう．

証明. 実際, これは, 定理 14.9 の主張を $\alpha=0$ として考えたものに他ならない. □

例 14.11 (指数関数 e^x の $(n+1)$ 次 Maclaurin 展開)**.** 指数関数 $f(x)=e^x$ $(\,x\in\mathbb{R}=(-\infty,\infty)\,)$ に対して,

$$f^{(i)}(x)=(\,e^x\,)^{(i)}=e^x\quad(i=0,1,2,\cdots,n,n+1,\cdots)$$

である (cf. 定理 14.3 (2))．従って, 任意の自然数 $n\ (=1,2,3,\cdots)$ に対して, Maclaurin の定理 (定理 14.10) から,

$$e^x\overset{(14.3')}{=}\sum_{i=0}^{n}\frac{e^0}{i!}\,x^i+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\,x^i+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}=\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right\}+\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{$*$}$$

となるような $0<\theta<1$ が存在する．

上述の例 14.11 からもわかるように, 与えられた初等関数 $f(x)$ に対して, 高階導関数 $f^{(i)}(x)$ $(i=1,\cdots,n,n+1)$ が具体的に求められれば, $f(x)$ の有限次 Taylor 展開 (14.3) や有限次 Maclaurin 展開 (14.3') は容易に求められる．このような関数の展開式を通して考えることで, $f(x)$ の様々な値を近似的に計算することが可能となる．

例 14.12 (Napier 数 $e=2.71\cdots$ の "合理的な" 数値計算法)**.** 任意の自然数 $n\,(=1,2,3,\cdots)$ に対して, 例 14.11 で与えた e^x の $(n+1)$ 次 Maclaurin 展開に $x=1$ を代入することで,

$$e=e^1\overset{(*)}{=}\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}\iff e-\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

となるような $0<\theta<1$ が存在するといえる．ここで, 指数関数 e^x の正値性・(狭義) 単調性から, $0<e^\theta<e^1=e<3$ であることに注意すれば, 次のような不等式が得られる:

$$0<e-\left\{1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right\}<\frac{3}{(n+1)!}. \tag{$**$}$$

すなわち, 無理数 e と有理数 $P_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ の数値の誤差は, 一般に有理数 $R_n=\dfrac{3}{(n+1)!}$ の数値よりも真に小さいといえる．例えば, $n=6$ の場合,

$$R_6=\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}=0.0005\dot{9}\dot{5}\dot{2}\dot{3}\dot{8}\dot{0}<0.001=10^{-3}.$$

従って, $(**)$ により, $(0<)\ e-P_6<R_6<10^{-3}$．すなわち, $P_6=\displaystyle\sum_{i=0}^{6}\frac{1}{i!}=\frac{1957}{720}=\mathbf{2.71}80\dot{5}$ から, $e=\mathbf{2.71}(8)\cdots$ であるといえる[*7]．更に, $R_n=\dfrac{3}{(n+1)!}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ であるといえるので, はさみうちの原理により, 有理数列 $(P_n)_{n=1}^{\infty}=(P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots)$ は単調増加しながら, 極限値 $e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n\left(=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\right)$ へと近づいていくといえる．

[*6] Colin Maclaurin (1698–1746) : スコットランドの数学者 (Isaac Newton の弟子).

[*7] 実際の P_6, R_6 の値の小数点以下 3,4 桁目に注目すれば, P_6+R_6 の計算において小数点以下 4 桁目から 3 桁目への繰り上がりは生じないといえるので, e と P_6 は小数点以下 3 桁目まで一致しているといえる．